

Entwurf von robusten Regelkreisen unter der Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen*

Wolfgang Reinelt

Fachgebiet Steuerungs- und Regelungstechnik/Fachbereich Elektrotechnik
Universität Paderborn, D-33095 Paderborn
Email: Wolfgang.Reinelt@control.uni-paderborn.de

Zusammenfassung

Dieser Beitrag stellt ein Entwurfsverfahren vor, das zwei wesentliche Forderungen an einen Regelkreis berücksichtigt: Robustheit und die Einhaltung von (harten) Stellgrößenbeschränkungen. Das Entwurfsverfahren basiert auf der \mathcal{H}_∞ Loop-shaping Prozedur von McFarlane & Glover und ist auf (nichtquadratische) Mehrgrößenstrecken anwendbar. Nach kurzer Einführung und Definition der Aufgabenstellung werden zuerst die wesentlichen Punkte der McFarlane & Glover Prozedur zusammengefaßt. Danach wird das Entwurfsverfahren um die Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen erweitert und dessen Anwendbarkeit anhand zweier Beispiele verdeutlicht. Wir schließen mit einigen zusammenfassenden Bemerkungen und geben einen Ausblick auf weitere Arbeiten.

1 Einführung in die Aufgabenstellung

Die herkömmlichen Verfahren zum Entwurf robuster Regler – qualitative Verfahren [4], quasiklassische Verfahren der britischen Schule [5],[8] oder Entwürfe basierend auf der \mathcal{H}_∞ -Kontrolltheorie [2] – lassen eine Berücksichtigung von (harten) Stellgrößenbeschränkungen in den seltensten Fällen direkt zu. Die Forderung nach der Einhaltung solcher Beschränkungen taucht jedoch (auch in der Literatur über robuste Regelungen) immer wieder auf. Sie wird durch Verwendung von anti-windup Konzepten [2] oder nachträgliches Überprüfen in der Simulation [6] gelöst. Beide Lösungswege erscheinen unbefriedigend, da im ersten Fall die Überlegungen zur Robustheit des Regelkreises hinfällig werden und im zweiten Fall die Einhaltung der Beschränkung keineswegs in allen Betriebssituationen gewährleistet ist.

Eine direkte Berücksichtigung der Beschränkungen wird in [3] vorgestellt. Die Stellgrößenbeschränkung wird als weitere Nebenbedingung zum \mathcal{H}_∞ -Problem hinzugefügt und dieses dann gelöst. Eine weitere Möglichkeit wird in [11] angegeben: Stellgrößenbeschränkungen werden in Form von Linearen Matrixungleichungen (LMI) in ein \mathcal{H}_∞ -Entwurfsverfahren eingebettet.

In allen bislang angedeuteten Verfahren muß notwendigerweise die Referenzgröße betragsmäßig beschränkt werden, um das Problem zu lösen. Vergangene Arbeiten zeigten jedoch, daß eine betragsmäßige Beschränkung von Referenzgröße und deren erster zeitlicher Ableitung eine erheblich bessere Stellgrößenauslastung mit sich bringen [9]. Wir geben daher die folgende

*Beitrag zum Tagungsband des 10. Steirischen Seminars über Regelungstechnik und Prozessautomatisierung. Leibnitz/Steiermark, 15.-18. September 1997

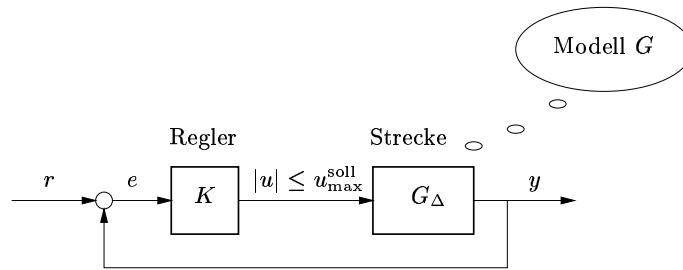


Abbildung 1: Standardregelkreis mit unsicherer und eingangsbeschränkter Strecke G_Δ

Definition der Aufgabenstellung:

Gegeben sei der aus linearen und zeitinvarianten Komponenten bestehende Standardregelkreis aus Abbildung 1. Als Referenzgrößen für diesen Regelkreis lassen wir diejenigen $r(t)$ zu, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\left. \begin{array}{l} r(t) = 0 \quad \text{für } t \leq 0 \\ |r(t)| \leq R \\ |\dot{r}(t)| \leq \dot{R} \end{array} \right\} \text{für } t > 0$$

Diese Definition entspricht der von Reichel [9]; wir werden sie im dritten Abschnitt auf Mehrgrößensysteme ausdehnen.

Stellen wir nun die Forderungen für den geschlossenen Regelkreis auf. Es handelt sich um die typischen Forderungen zum Entwurf robuster Regler, erweitert um die Forderung nach der Einhaltung der Stellgrößenbeschränkung:

1. (interne) Stabilität des geschlossenen Kreises.
2. Fähigkeit zur Unterdrückung von Stör- und Meßrauschen und gutes Führungsverhalten (im folgenden auch kurz als quantitative Eigenschaften des Regelkreises bezeichnet).
3. Robustheit: Konservierung der beiden ersten Eigenschaften für den Kreis mit gestörter Strecke G_Δ .
4. Einhaltung der Stellgrößenbeschränkung $|u(t)| \leq u_{\max}^{\text{soll}}$ für alle $t \geq 0$.

Den Begriff der gestörten Strecke werden wir im zweiten Abschnitt präzisieren; die Forderung nach Einhaltung der Stellgrößenbeschränkung werden wir im dritten Abschnitt auf den Mehrgrößensystemfall ausdehnen.

2 Die \mathcal{H}_∞ Loop shaping Prozedur nach McFarlane & Glover

Im nächsten Abschnitt wird eine Entwurfsprozedur aufbauend auf der Loop-shaping Prozedur nach McFarlane & Glover [6] formuliert. Daher kommen wir nicht umhin, die Originalprozedur zu formulieren. Die wesentlichen Schritte, die zur McFarlane & Glover-Prozedur führen, werden daher kurz genannt, danach wird die Prozedur als Algorithmus formuliert. Alle Aussagen (ebenso die Beweise dazu) sind [6] zu entnehmen. Zunächst klären wir einige Schreibweisen und definieren die Übertragungsmatrizen, mit denen wir arbeiten werden.

2.1 Generelle Voraussetzungen und Abkürzungen Alle Systeme sind linear und zeitinvariant. Ein kontinuierliches Zustandsmodell der Form

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

wird mit (A, B, C, D) oder $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ abgekürzt. Die zugehörige Übertragungsmatrix

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

wird durch $G(s) \stackrel{s}{=} (A, B, C, D)$ oder $G(s) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ abgekürzt. Die Menge aller realisierbaren und reell-rationalen Übertragungsmatrizen kürzen wir mit \mathcal{R} ab.

2.2 Definition (∞ -Norm) Die Menge aller realisierbaren Übertragungsmatrizen $G(s)$ ohne Pole auf der imaginären Achse bezeichnen wir mit \mathcal{RL}_∞ . Für alle $G \in \mathcal{RL}_\infty$ ist die \mathcal{L}_∞ -Norm definiert als

$$\|G\|_\infty := \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(i\omega)),$$

wobei $\bar{\sigma}(\cdot)$ der größte Singulärwert ist.

Die Untermenge all derjenigen Übertragungsmatrizen aus \mathcal{RL}_∞ , die keine Pole in $\operatorname{Re}(s) > 0$ haben, bezeichnen wir mit \mathcal{RH}_∞ oder kurz mit \mathcal{H}_∞ . Die oben definierte Norm bezeichnen wir in diesem Falle als die \mathcal{H}_∞ -Norm von $G \in \mathcal{RH}_\infty$.

Wenden wir uns nun der Darstellung der Regelstrecke zu. Die nominale Strecke stellen wir in der normalisierten linkskoprimen Faktorisierung dar:

$$G = M^{-1}N, \tag{1}$$

wobei (N, M) die normalisierten linkskoprimen Faktoren der Strecke sind. Diese Darstellungsweise hat für uns den Vorteil, daß die koprimen Faktoren per definitionem aus \mathcal{RH}_∞ , also insbesondere stabil sind. Konsequenterweise modellieren wir die unsichere Strecke G_Δ durch fehlerbehaftete koprimen Faktoren der Nominalstrecke:

$$G_\Delta = (M + \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N) \tag{2}$$

Abbildung 2 verdeutlicht diese Darstellungsweise:

Als nächstes wollen wir klären, welche Störungen $[\Delta_N, \Delta_M]$ der koprimen Faktoren wir als zulässig betrachten:

2.3 Definition (zulässige Störung) Für $\epsilon > 0$ gegeben heißt eine Störung $\Delta = [\Delta_N, \Delta_M]$ der Übertragungsmatrix aus Gleichung (1) (ϵ -) zulässig, falls $\|\Delta\|_\infty < \epsilon$ gilt. Die Menge aller (ϵ -) zulässigen Störungen kürzen wir mit \mathcal{D}_ϵ ab:

$$\mathcal{D}_\epsilon := \{\Delta : \Delta \in \mathcal{RH}_\infty; \|\Delta\|_\infty < \epsilon\} \tag{3}$$

Nun können wir uns der zentralen Frage zuwenden, wann der geschlossene Regelkreis (aus Abbildung 2) mit unsicherer Strecke (intern) stabil ist.

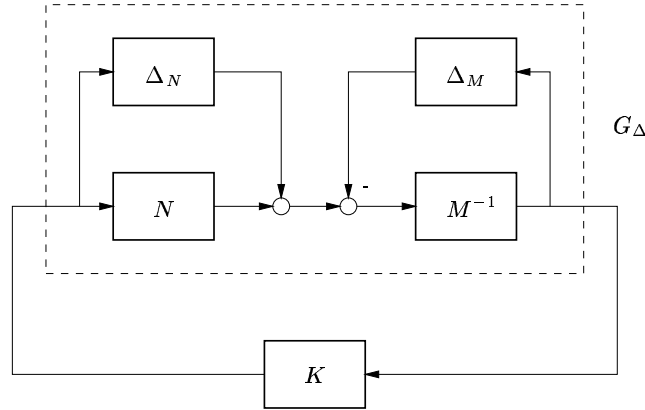


Abbildung 2: Verwendung fehlerbehafteter koprimmer Faktoren

2.4 Theorem (Robuste Stabilität) K stabilisiert $G_\Delta = (M + \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N)$ (im Regelkreis von Abbildung 2) für alle Störungen $\Delta = [\Delta_N, \Delta_M] \in \mathcal{D}_\epsilon$ der Strecke genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. K stabilisiert G
2. es gilt:

$$\left\| \begin{bmatrix} K(I - GK)^{-1}M^{-1} \\ (I - GK)^{-1}M^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq 1/\epsilon \quad (4)$$

ϵ aus Gleichung (4) heißt Stabilitätsreserve. Nach dem Small Gain Theorem gilt $\epsilon < 1$.

Ausgehend von Theorem 2.4 ist klar, dass wir denjenigen Regler K suchen, der die maximale Stabilitätsreserve $\epsilon (= \epsilon_{\max})$ produziert, sodaß Gleichung (4) erfüllt ist, das heißt wir suchen:

$$\epsilon_{\max} = \left(\inf_{\text{stab } K} \left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I - GK)^{-1}M^{-1} \right\|_\infty \right)^{-1} \quad (5)$$

Das nächste Theorem zeigt, daß sich die maximale Stabilitätsreserve explizit angeben läßt:

2.5 Theorem Die maximale Stabilitätsreserve in Gleichung (5) ist gegeben durch:

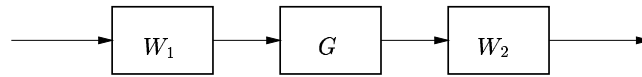
$$\epsilon_{\max} = \sqrt{1 - \|[N, M]\|_H^2} \quad (6)$$

(wobei $\|\cdot\|_H$ die Hankel-Norm ist).

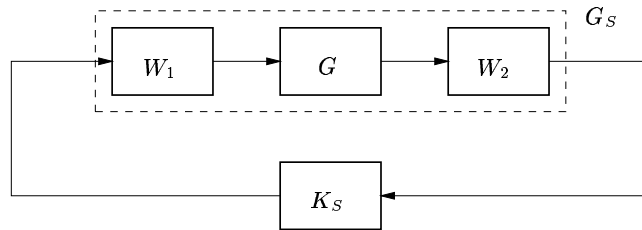
2.6 Definition Den zur maximalen Stabilitätsreserve ϵ_{\max} gehörigen Regler bezeichnen wir als *optimalen* Regler. Regler, die ein $\epsilon < \epsilon_{\max}$ erzeugen nennen wir *suboptimale* Regler. Für einen Regler mit Stabilitätsreserve ϵ definieren wir den *Performance Faktor* f durch $f := \epsilon_{\max}/\epsilon$ (≥ 1). Offensichtlich hat der optimale Regler den Performance Faktor $f = 1$.

2.7 Bemerkung (Reglerordnung) Sei n die Ordnung der Strecke G . Suboptimale Regler haben eine Ordnung $\leq n$, optimale Regler eine Ordnung $\leq n - k$ ($k \geq 1$)

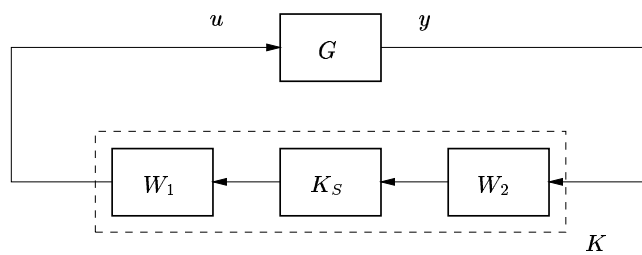
Die bisherigen Ergebnisse befähigen uns zum Entwurf eines robust stabilen Regelkreises. Die geforderten quantitativen Eigenschaften werden wir mit Hilfe der open-loop-shaping Technik einbringen. Wie in Abbildung 3 angedeutet, verwenden wir die Gewichte W_1 und W_2 um den offenen Kreis nach unseren Wünschen zu formen. Da wir aber mit den Gewichten nicht den offenen Kreis GK



a) Auswahl der Gewichte $W_{1,2}$



b) H_∞ Reglerentwurf



c) endgültiger Regler

Abbildung 3: Loop-shaping in drei Schritten

bearbeiten, sondern nur die Strecke G zu W_2GW_1 (der Regler wird erst nach der Wahl der Gewichte berechnet) stellt sich die abschließende Frage: War die Wahl der Gewichte erfolgreich, sodaß sich die Singulärwerte von “verbogener“ Strecke W_2GW_1 und resultierendem offenem Kreis GW_1KW_2 ähneln? In diesem Fall könnten wir auf gute Robustheitseigenschaften des Regelkreises schließen. Im allgemeinen schauen wir uns dazu die Singulärwerte der beiden Übertragungsfunktionen an, im speziellen Fall der NLCF-Prozedur gibt die berechnete Stabilitätsreserve ϵ Aufschluß über Erfolg oder Mißerfolg bei der Wahl der Gewichte:

2.8 Bemerkung Eine “kleine“ Stabilitätsreserve ϵ bedeutet, daß die durch die Wahl der Gewichte gestellten Anforderungen unvereinbar sind, eine “große“ Stabilitätsreserve $\epsilon \rightarrow 1$ deutet auf gute Robustheitseigenschaften des Regelkreises hin. In der Praxis ist ein Wert von $\epsilon > 0.3$ akzeptabel.

Abschließend formulieren wir die Entwurfsprozedur entsprechend Abbildung 3:

-
1. Wahl eines Performance Faktors f und der Gewichtsmatrizen W_1 und W_2 .
 2. Berechnung des H_∞ -Reglers.
 3. Berechnung des endgültigen Reglers inklusive der Gewichte W_i .
 4. Falls die Stabilitätsreserve ϵ groß genug ist, ist der Entwurf (hinsichtlich der Robustheit) gelungen. Falls nicht, zurück zu Schritt 1.

Prozedur 1: Loop-shaping nach McFarlane & Glover

3 Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen

Die im letzten Abschnitt vorgestellte Prozedur soll nun auf den Fall von eingangsbeschränkten Regelstrecken ausgeweitet werden. Im Eingrößenfall bedeutet diese Forderung, daß für die in der Einführung genannten Referenzgrößen $r(t)$ die Stellgröße $u(t)$ eine vorgegebene Schranke dem Betrage nach nicht überschreiten darf, wie in Abbildung 1 angedeutet:

$$\max_{t>0} |u(t)| \leq u_{\max}^{\text{sol}} \quad (7)$$

Bevor wir die Prozedur endgültig formulieren, wollen wir jedoch, wie in der Einführung angekündigt, die Begriffe "zulässige Referenzgröße" und "maximale Stellgröße" auf den Mehrgrößenfall ausdehnen.

3.1 Definition Seien $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ und $X = [X_1, \dots, X_n]^T \in \mathbb{R}^n$. Falls $x_i \leq X_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, schreiben wir dafür kurz $x \leq_c X$. Analog verwenden wir \geq_c , $<_c$ und $>_c$.

3.2 Definition (zulässige Referenzgröße) Seien $0 <_c R, \dot{R} \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt eine Referenzgröße $r : t \in \mathbb{R} \mapsto r(t) \in \mathbb{R}^n$ (R, \dot{R})-zulässig, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $r(t) = 0$ für alle $t \leq 0$,
2. $|r(t)| \leq_c R$ für alle $t > 0$ und
3. $|\dot{r}(t)| \leq_c \dot{R}$ für alle $t > 0$

Die Menge aller (R, \dot{R})-zulässigen Referenzgrößen wird im folgenden mit $\mathcal{A}(R, \dot{R})$ bezeichnet.

3.3 Definition (maximale Stellgröße) Gegeben sei ein intern stabiler Regelkreis wie in Abbildung 1. Dann heißt $u_{\max} = [\max_{t>0} |u_1(t)|, \dots, \max_{t>0} |u_n(t)|]^T$ die maximale Stellgröße.

Wir fassen die Kernaussagen aus der Arbeit von Reichel [9] wie folgt zusammen:

3.4 Algorithmus (Balkenverfahren nach Reichel) Gegeben sei ein lineares und zeitinvariantes Eingrößensystem mit Eingangsgröße $x(t)$ und Ausgangsgröße $y(t)$. Der Eingang sei eine (X, \dot{X})-zulässige Referenzgröße.

- (a) Der Algorithmus aus [9] (Balkenverfahren) ermittelt den maximalen Ausgang des Systems:
 $y_{\max} := \max_{t>0} |y(t)|$.
- (b) Eine (X, \dot{X})-zulässige Eingangsgröße existiert, sodaß y_{\max} angenommen wird.

3.5 Bemerkung Im Eingrößenfall kann Algorithmus 3.4 dazu benutzt werden, um die maximale Stellgröße u_{\max} aus Definition 3.3 zu ermitteln, wenn die Referenzgröße $r(t)$ (R, \dot{R})-zulässig ist.

3.1 Entwurfsverfahren – Eingrößenfall

Für eine Eingrößenregelstrecke G seien die Beschränkungen $R, \dot{R} > 0$ für die Referenzgröße und die Stellgrößenbeschränkung $u_{\max}^{\text{sol}} > 0$ gegeben. Nach der letzten Bemerkung können wir mit Algorithmus 3.4 die maximale Stellgröße u_{\max} ermitteln. Wir formulieren daher folgende Erweiterung von Prozedur 1, mit der sich der gewünschte Regler entwerfen läßt (siehe Abbildung 3):

1. Wahl des Performance Faktors f und des Gewichtes W (W_1 und W_2 können im Eingrößenfall zum einem einzigen Gewicht W zusammengefasst werden).
2. Berechnung des \mathcal{H}_∞ -Reglers.
3. Berechnung der endgültigen Reglers inklusive Gewicht W .
4. Bestimmung der maximalen Stellgröße u_{\max} .
5. Entscheidung, ob alle Entwurfsforderungen erfüllt sind:
 - gute Robustheitseigenschaften, d.h. ϵ "groß genug"?
 - ausreichende Unterdrückung von Stör- und Meßrauschen?
 - Einhaltung der Stellgrößenbeschränkung: $u_{\max} \leq u_{\max}^{\text{sol}}?$

Falls ein oder mehrere Punkte nicht erfüllt sind, zurück zu Schritt 1.

Prozedur 2: Loop shaping für eingangsbeschränkte Eingrößensysteme

Üblicherweise sind im fünften Schritt *nicht* sofort alle Forderungen erfüllt. Detailliertere Informationen erhalten wir mit Blick auf die Bodediagramme bzw. den Verlauf der Singulärwerte (im Mehrgrößenfall) der folgenden Übertragungsfunktionen:

- Strecke G und gewichtete Strecke GW . Ein Vergleich dieser beiden Verläufe gibt an, in welchem Frequenzbereich die Gewichtung stattfindet.
- Erreichter offener Kreis GK (wobei der Regler K bereits das Gewicht W beinhaltet). Ein Vergleich zwischen GW und GK gibt detailliertere Informationen über die erfolgreiche Gewichtung der Strecke, als der bloße Blick auf die Stabilitätsreserve ϵ .
- Empfindlichkeit $(1-GK)^{-1}$, komplementäre Empfindlichkeit $GK(1-GK)^{-1}$ zur Beurteilung der Störunterdrückung.

Überlegungen zur Wahl der Gewichte bei nicht eingehaltener Stellgrößenbeschränkung werden in Abschnitt 3.3 angestellt.

3.2 Erweiterung auf den Mehrgrößenfall

Prozedur 2 arbeitet nur im Falle von Eingrößensystemen, da Algorithmus 3.4 (der in Schritt 4 benutzt wird) nur für skalare Übertragungsfunktionen $T_{ru}(s) = (1 - KG)^{-1}K$ arbeitet. Wir lösen uns nun von dieser Beschränkung und zeigen, daß auch im Mehrgrößenfall eine Berechnung der maximalen Stellgröße u_{\max} mit Hilfe des Balkenverfahrens möglich ist. Das geschieht in zwei Schritten:

Schritt 1 (nur eine Stellgröße):

Zuerst betrachten wir einen Regelkreis mit n Referenzgrößen $r(t) = [r_1(t), \dots, r_n(t)]^T \in \mathcal{A}(R, \dot{R})$ und einer skalaren Stellgröße $u(t)$.

Sei $T_{ru}(s) = [T_{ru,1}(s), \dots, T_{ru,n}(s)]$ die Übertragungsfunktion von r nach u . Dann ist $u(s)$ gegeben durch

$$u(s) = T_{ru,1}(s) \cdot r_1(s) + \dots + T_{ru,n}(s) \cdot r_n(s) \quad (8)$$

Wir kürzen wie folgt ab: $\tilde{u}_i(s) = T_{ru,i}(s) \cdot r_i(s)$ und betrachten nun die maximale Stellgröße u_{\max} . Mit Algorithmus 3.4 berechnen wir die folgenden Werte $\tilde{u}_{\max,i} = \max_{t \geq 0} |\tilde{u}_i(t)|$. Dann ist aber die maximale Stellgröße $u_{\max} = \max_{t \geq 0} |u(t)|$ gegeben durch

$$u_{\max} = \sum_{i=1}^n \tilde{u}_{\max,i}. \quad (9)$$

In diesem Falle beschränkt sich die Ermittlung von u_{\max} auf die einfache Addition der Zwischenwerte $\tilde{u}_{\max,i}$. Es folgt sofort aus 3.4, daß u_{\max} für eine spezielle Referenzgröße $r(t) \in \mathcal{A}(R, \dot{R})$ auch angenommen wird ($r(t)$ ist ein Vektor, 3.4(b) kann komponentenweise angewandt werden).

Schritt 2 (allgemeiner Mehrgrößenfall):

Wir betrachten nun einen Regelkreis mit n Referenzgrößen $r(t) = [r_1(t), \dots, r_n(t)]^T \in \mathcal{A}(R, \dot{R})$ und m Stellgrößen $u(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)]^T$. Im Falle einer vektoriellen Stellgröße war die maximale Stellgröße definiert als

$$u_{\max} = [u_{\max,1}, \dots, u_{\max,m}]^T \quad (10)$$

(siehe Definition 3.3). Offensichtlich können die einzelnen Komponenten $u_{\max,i}$ von u_{\max} wie in Schritt 1 berechnet werden – in der Notation von Gleichung (9) mit $u_{\max,i}$ anstatt u_{\max} .

Wir formulieren das gewonnenen Ergebnis formal als:

3.6 Algorithmus (Erweiterung des Balkenverfahrens nach Reichel) Gegeben sei ein linearer und zeitinvarianter Mehrgrößenregelkreis mit (R, \dot{R}) -zulässiger Referenzgröße $r(t)$ und Stellgröße $u(t)$.

- (a) Die maximale Stellgröße u_{\max} kann mit den Gleichungen (9,10) ermittelt werden.
- (b) Für jede Komponente $u_i(t)$ der Stellgröße $u(t)$ existiert eine (R, \dot{R}) -zulässige Referenzgröße, sodaß $u_{\max,i}$ auch angenommen wird.

3.7 Bemerkung Algorithmus 3.6 kann ebenfalls für beliebige Übertragungsmatrizen mit (X, \dot{X}) -zulässigem Eingang $x(t)$ und Ausgang $y(t)$ formuliert werden.

Wir formulieren nun die Entwurfsprozedur für den Mehrgrößenfall:

Gegeben eine Mehrgrößenregelstrecke G , die Beschränkungen $R, \dot{R} >_c 0$ für die Referenzgröße und die Stellgrößenbeschränkung $u_{\max}^{\text{sol}} >_c 0$ (R, \dot{R} und u_{\max}^{sol} sind nun Vektoren). Algorithmus 3.6 versetzt uns in die Lage, die maximale Stellgröße u_{\max} zu berechnen (ebenfalls ein Vektor). Die Entwurfsprozedur lautet nun:

1. Wahl des Performance Faktors f und der Gewichte W_1 und W_2 .
2. Berechnung des \mathcal{H}_∞ -Reglers.
3. Berechnung der endgültigen Reglers inklusive Gewichte W_i .
4. Bestimmung der maximalen Stellgröße u_{\max} .
5. Entscheidung, ob alle Entwurfsforderungen erfüllt sind:
 - gute Robustheitseigenschaften, d.h. ϵ "groß genug"?
 - ausreichende Unterdrückung von Stör- und Meßrauschen?
 - Einhaltung der Stellgrößenbeschränkung: $u_{\max} \leq_c u_{\max}^{\text{sol}}$?

Falls mindestens ein Punkt nicht erfüllt ist, zurück zum ersten Schritt.

Prozedur 3: Loop shaping für eingangsbeschränkte Mehrgrößensysteme

3.3 Wahl der Gewichte

Beim Loop-shaping werden im allgemeinen keine Empfehlungen gegeben, wie die Gewichte zu wählen sind, um beispielsweise eine gewisse Stabilitätsreserve ϵ zu erreichen.

Im Falle einer nicht eingehalteten Stellgrößenbeschränkung stellt sich der Sachverhalt freundlicher dar: die maximale Stellgröße kann durch Manipulation der Singulärwerte der Zeilen von $T_{ru}(s)$ beeinflusst werden.

Bei den nachfolgenden Überlegungen betrachten wir vom Mehrgrößenregelkreis nur die Übertragungsfunktion von Referenzgröße r zu Stellgröße u , die wir der Einfachheit halber bis zum Ende dieses Abschnitts $P(s)$ statt $T_{ru}(s)$ nennen:

$$\begin{aligned} u(s) &= P(s) \cdot r(s) \quad \text{oder} \\ u(t) &= p(t) \star r(t) \end{aligned}$$

wobei “ \star “ die Faltung und $p(t)$ die entsprechende Gewichtsfunktion ist. Wir definieren nun die folgenden Normen:

- die ∞ -Norm einer skalaren Zeitfunktion $u(t)$:

$$\|u\|_{\infty} := \sup_{t \geq 0} |u(t)|$$

- die ∞ -Norm einer vektoriellen Zeitfunktion $r(t)$:

$$\|r\|_{\infty} := \max_i \|r_i(t)\|_{\infty}$$

- die nukleare Norm einer Übertragungsfunktion:

$$\|P\|_N := \sum_{j=1}^n \sup_{\omega} \sigma_j(P(i\omega))$$

wobei $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ die kanonisch geordneten Singulärwerte sind.

- die Einsnorm der Gewichtsfunktion:

$$\|p\|_1 := \int_0^{\infty} |p(t)| dt$$

Wir halten fest, daß nach Definition 3.3 die maximale Stellgröße im skalaren Fall die ∞ -Norm der Stellgröße ist und im Mehrgrößenfall komponentenweise aus solchen ∞ -Normen besteht. Wir beschränken uns daher im folgenden auf den Fall von einer Stellgröße und n Referenzgrößen. Für die ∞ -Norm gilt folgende Abschätzung [12]:

$$\|u\|_{\infty} \leq \|p\|_1 \|r\|_{\infty}. \quad (11)$$

Die Einsnorm der Gewichtsfunktion beeinflusst also unsere maximale Stellgröße. Wir suchen jetzt einen Zusammenhang zwischen der \mathcal{H}_{∞} -Norm von $P(s)$ oder deren Singulärwerten und der Einsnorm der Gewichtsfunktion $p(t)$.

Nach [1] gilt im Falle einer stabilen¹ und echt rationalen Übertragungsfunktion $P(s)$:

¹Stabilität ist für uns wegen der internen Stabilität des Regelkreises keine Einschränkung.

$$2 \cdot \|P\|_N \geq \|p\|_1 \geq \|P\|_\infty. \quad (12)$$

Insgesamt ergeben die Gleichungen (11) und (12) dann die folgende Situation:

$$u_{\max} = \|u\|_\infty \leq \|p\|_1 \cdot \|r\|_\infty \leq 2 \cdot \|P\|_N \cdot \|r\|_\infty \quad (13)$$

Ist nach einem Reglerentwurf nun die maximale Stellgröße zu hoch, kann durch Absenken der nuklearen Norm der Übertragungsfunktion: $\|P\|_N$ die obere Schranke für u_{\max} verringert werden. Da $P(s)$ ein Zeilenvektor (bestehend aus mehreren skalaren Übertragungsfunktionen) ist, gibt es nur einen einzigen Singulärwert und die nukleare Norm fällt mit der \mathcal{H}_∞ -Norm zusammen. Haben wir den Verlauf des (frequenzabhängigen) Singulärwertes von $P(s)$ nun gegeben, reicht es aus, diesen im (Frequenz-)Bereich um das jeweilige Maximum abzusenken, um die \mathcal{H}_∞ -Norm und damit die nukleare Norm insgesamt zu verkleinern.

Die beiden Beispiele im nächsten Abschnitt zeigen nun die Arbeitsweise der vorgestellten Prozedur.

4 Beispiele

4.1 Eingrößenfall – ein akademisches Beispiel

Das erste unserer Beispiele untersucht die stabile und nicht-minimalphasige Strecke $G(s) = \frac{s-1}{s(s+2)}$ (siehe auch McFarlane & Glover [6] oder Horowitz²). Wir benutzen unseren Standardregelkreis (aus Abbildung 1) und geben folgende Beschränkungen für die Referenzgröße $r(t)$ vor:

$$\left. \begin{array}{l} |r(t)| \leq 7 \\ |\dot{r}(t)| \leq 2 \end{array} \right\} \text{ für } t > 0 \quad (14)$$

Ziel ist der Entwurf eines Reglers, der $|u(t)| \leq 1$ garantiert, d.h. $u_{\max}^{\text{sol}} = 1$. In diesem Abschnitt berechnen wir erst einmal optimale Regler (d.h. Performance Faktor $f = 1$).

Entwurfsrunde 1: Verwendung von konstanten Gewichten

Zuerst untersuchen wir konstante Gewichte $W = \text{const}$ (wie in [6]). Abbildung 4 zeigt die Betragskennlinien bei der Wahl $W = 1$ (kein Gewicht) und $W = 20$ (inkompatibles Gewicht).

Als optimale Regler ergeben sich:

W	ϵ_{\max}	u_{\max}	Regler $K(s)$
1	0.50378	3.8590	$(1.715s + 3.303)/(s + 5.663)$
20	0.06837	15.937	$(291.9s + 457.5)/(s + 333.8)$

In beiden Fällen erhalten wir einen Regler erster Ordnung (klar wegen Bemerkung 2.7). $\epsilon_{\max} = 0.06837$ im Falle $W = 20$ zeigt eine unzulässige Wahl des Gewichtes, was auch aus den unterschiedlichen Frequenzkennlinien von gewichteter Strecke und offenem Kreis in Abbildung 4 (rechts) deutlich wird. Unser Ziel $u_{\max} \leq 1$ haben wir in beiden Fällen verfehlt.

Wir arbeiten nun mit konstanten Gewichten weiter, senken aber den Verstärkungsfaktor um die maximale Stellgröße zu senken (siehe Abschnitt 3.3).

W	ϵ_{\max}	u_{\max}	Regler $K(s)$
0.01	0.70446	0.070524	$(0.01007s + 0.02015)/(s + 2.03)$
0.0817	0.6860	0.9979	$(0.08666s + 0.1732)/(s + 2.249)$

²Horowitz, I. *Synthesis of Feedback Systems* Academic Press 1963

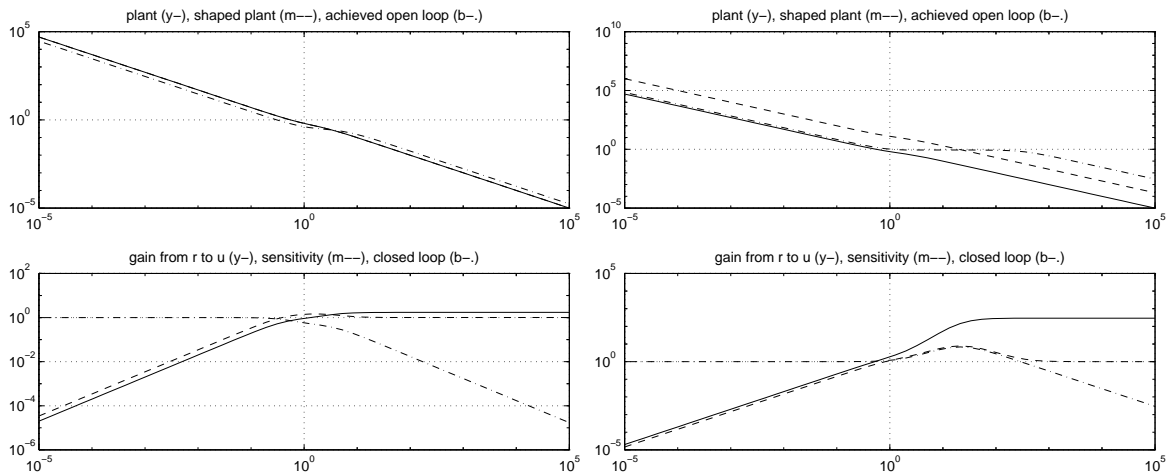


Abbildung 4: Entwurf für $W = 1$ (links) and $W = 20$ (rechts)

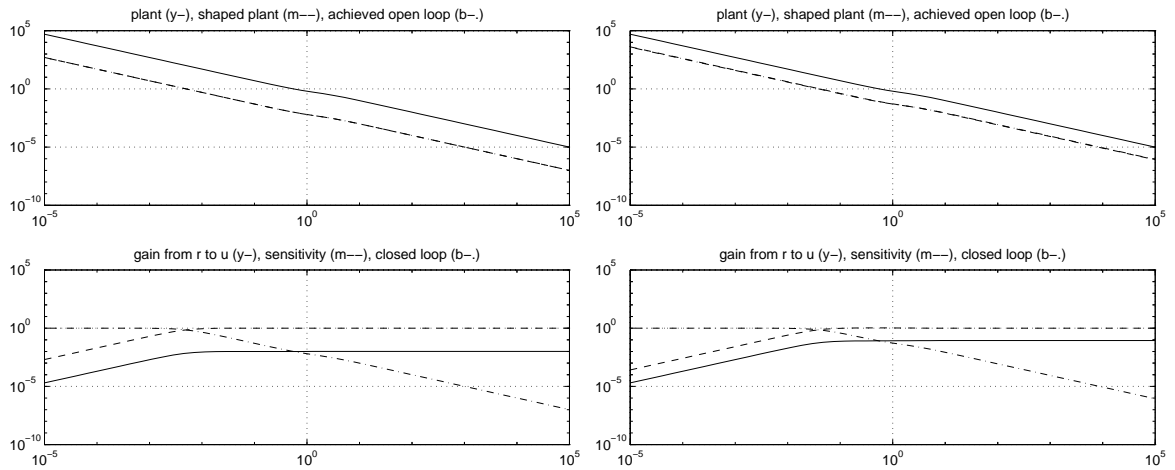


Abbildung 5: Entwurf für $W = 0.01$ (links) and $W = 0.0817$ (rechts)

Der Regler bei Wahl des Gewichtes $W = 0.0817$ gewährleistet die geforderte Stellgrößenbeschränkung mit $u_{\max} = 0.9979 \leq 1$ und hat eine gute Stabilitätsreserve. Der Regler bei Wahl des Gewichtes $W = 0.01$ produziert zwar eine größere Stabilitätsreserve, erzeugt jedoch eine viel zu geringe Stellgrößenauslastung. Vom Aspekt der Stellgrößenbeschränkung ist der Regler bei Gewichtung mit $W = 0.0817$ zufriedenstellend.

Entwurfsrunde 2: Verwendung von frequenzabhängigen Gewichten

Im ersten Schritt wählen wir $W_1(s) = (0.3217s + 1.852)/(s + 1.864)$ und erhalten $u_{1,\max} = 3.8531$ bzw. $\epsilon_{1,\max} = 0.4877$. der optimale Regler hat Ordnung drei: $K_1(s) = (0.5758s^3 + 5.534s^2 + 14.88s + 12.12)/(s^3 + 7.525s^2 + 22.27s + 21.84)$.

Der Regelkreis verfehlt klar die Forderung nach der Stellgrößenbeschränkung. Ein Blick auf den Betrag von T_{ru} in Abbildung 6 (links) zeigt, daß dieser im Frequenzbereich um $\omega = 1$ zu hoch ist. Deshalb senken wir die Verstärkung des Gewichtes in diesem Frequenzbereich ab (siehe Abbildung 7, links):

$$W_2(s) = \frac{0.03841s + 0.002289}{s + 0.001}.$$

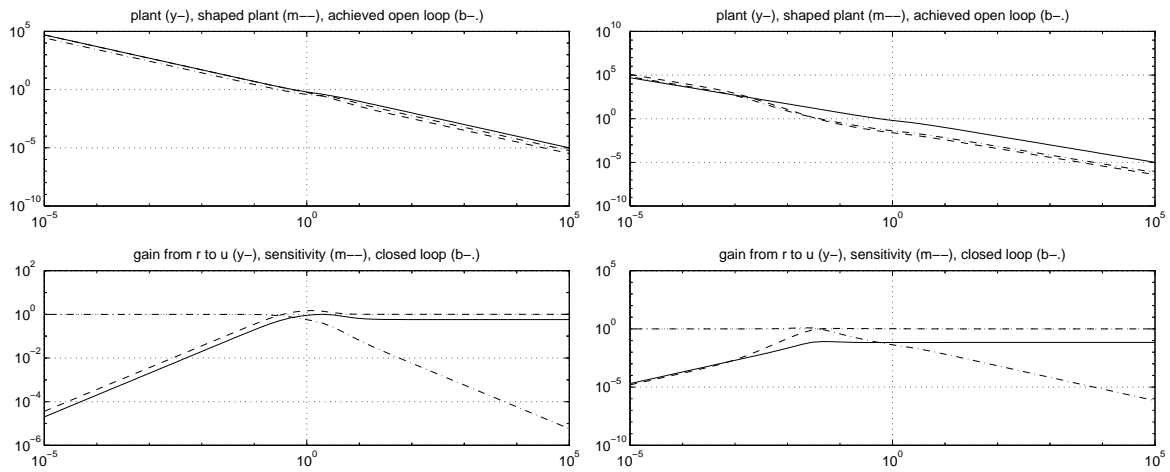


Abbildung 6: Entwurf für $W(s) = W_1(s)$ (links) und $W(s) = W_2(s)$ (rechts)

Mit diesem Gewicht erhalten wir $u_{2,\max} = 0.9979$ und $\epsilon_{2,\max} = 0.4902$, was im Sinne unserer Stellgrößenbeschränkung und der robusten Stabilität zufriedenstellend ist. Die Betragskennlinien sind in Abbildung 6 (rechts) dargestellt.

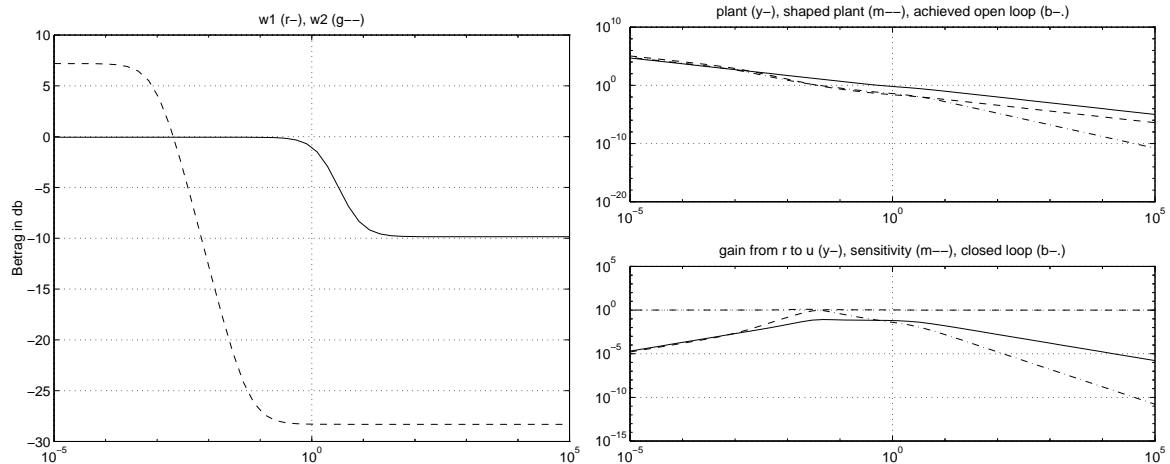


Abbildung 7: Gewichte $W_1(s)$ und $W_2(s)$ (links); Suboptimaler Entwurf für $W(s) = W_2(s)$ (rechts)

Der Vollständigkeit halber sei der optimale Regler dritter Ordnung genannt:

$$K_2(s) = \frac{0.0683s^3 + 0.1417s^2 + 0.01027s + 0.0001235}{s^3 + 2.18s^2 + 0.09815s + 9.597e - 05}.$$

Entwurfsrunde 3: suboptimaler Regler

Bislang haben wir immer den *optimalen* Regler berechnet. Betrachten wir nun das Gewicht W_2 und berechnen den suboptimalen Regler (mit Performance Faktor $f = 1.1$) für diesen Fall. Wir erhalten als Resultat für die maximale Stellgröße $u_{\max} = 0.9894$, also einen kleineren Wert als im "optimalen" Fall (siehe Abbildung 7, rechts). Dieser Effekt konnte in allen bisherigen Beispielen beobachtet werden: ein suboptimaler Regler produziert ein "kleineres u_{\max} " als der optimale Regler. Der Preis für die kleinere Stellgröße ist eine größere Reglerordnung, in diesem Fall ein suboptimaler Regler vierter Ordnung:

$$K_{subopt}(s) = \frac{0.1628s^3 + 0.3377s^2 + 0.02447s + 0.0002938}{s^4 + 4.442s^3 + 5.309s^2 + 0.2365s + 0.0002312}.$$

4.2 Mehrgrößenfall: Regelung der vertikalen Dynamik eines Flugzeugs

Nun demonstrieren wir die Anwendung unseres Verfahrens im Mehrgrößenfall am Beispiel einer Flugregelung, die ebenfalls von McFarlane & Glover [6], Maciejowski [5] und anderen untersucht wurde. Das Streckenmodell ist gegeben durch:

$$G(s) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & 0 & 1.1320 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0538 & -0.1712 & 0 & 0.0705 & -0.1200 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0485 & 0 & -0.8556 & -1.0130 & 4.4190 & 0 & -1.6650 \\ 0 & -0.2909 & 0 & 1.0532 & -0.6859 & 1.5750 & 0 & -0.0732 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (15)$$

Wir betten die Strecke in unseren Standardregelkreis (Abbildung 1) ein und entwerfen in diesem Abschnitt durchgehend suboptimale Regler mit Performance Faktor $f = 1.1$. McFarlane & Glover fordern in Ihrem Entwurf neben Robustheit und quantitativen Eigenschaften des Regelkreises die Einhaltung der folgenden Stellgrößenbeschränkungen:

$$|u_1(t)| < 40, \quad |u_2(t)| < 10, \quad |u_3(t)| < 40 \quad (16)$$

Zur Lösung des Problems mit unserem Verfahren beschränken wir die Führungsgröße durch:

$$R = [1, 1, 1]^T, \quad \dot{R} = [5, 11, 13]^T. \quad (17)$$

Einer der McFarlane & Glover Entwürfe³ arbeitet mit einer diagonalen Gewichtung $W = \text{diag}\{w_1, w_2, w_3\}$ der Strecke, wobei

$$\begin{aligned} w_1 &= 24 \cdot w_c \\ w_2 &= 12 \cdot w_c \\ w_3 &= 24 \cdot w_c \\ w_c &= (s + 0.4)/s. \end{aligned}$$

Der Übersichtlichkeit halber beschränken wir uns ebenfalls auf *ein diagonales* Gewicht und erhalten mit dem von McFarlane & Glover gewählten Gewicht W eine Stabilitätsreserve von $\epsilon = 0.3444$ und eine maximale Stellgröße von

$$u_{\max} = [32.1605, 10.9964, 59.6279]^T.$$

Abbildungen 8 und 9 zeigt den Verlauf der Singulärwerte. Wir stellen fest, daß die Stellgrößenbeschränkung in den letzten beiden Komponenten nicht eingehalten wird!

Abbildung 9 zeigt, daß die Singulärwerte im Bereich der Frequenzen um $\omega = 10$ zu hoch sind. Zur Verbesserung senken wir deshalb die Gewichte oberhalb dieser Frequenzen weiter ab (siehe Abbildung 10). Im Detail wählen wir $W_s = \text{diag}\{w_{1s}, w_{2s}, w_{3s}\}$ mit:

³Entwurf (2), Seite 163 in [6]

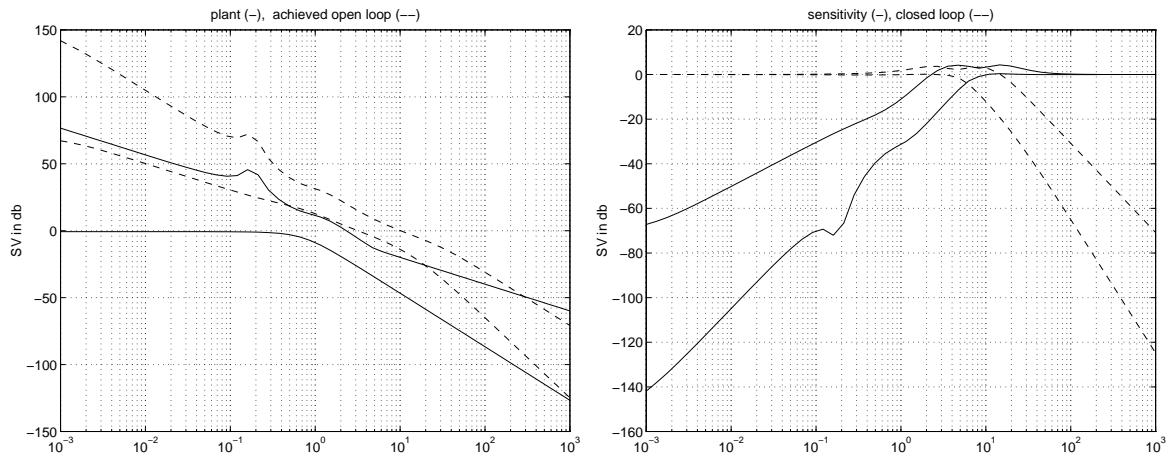


Abbildung 8: McFarlane-Glover Entwurf: Größter und kleinster Singulärwert der Strecke, des offenen Kreises und der (komplementären) Empfindlichkeit.

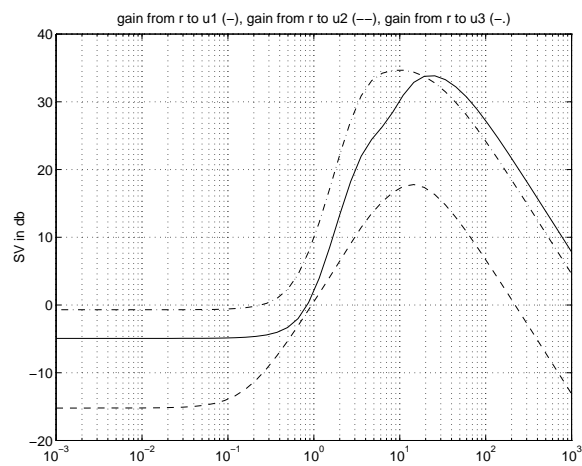


Abbildung 9: McFarlane-Glover Entwurf: Singulärwerte für die einzelnen Stellgrößen.

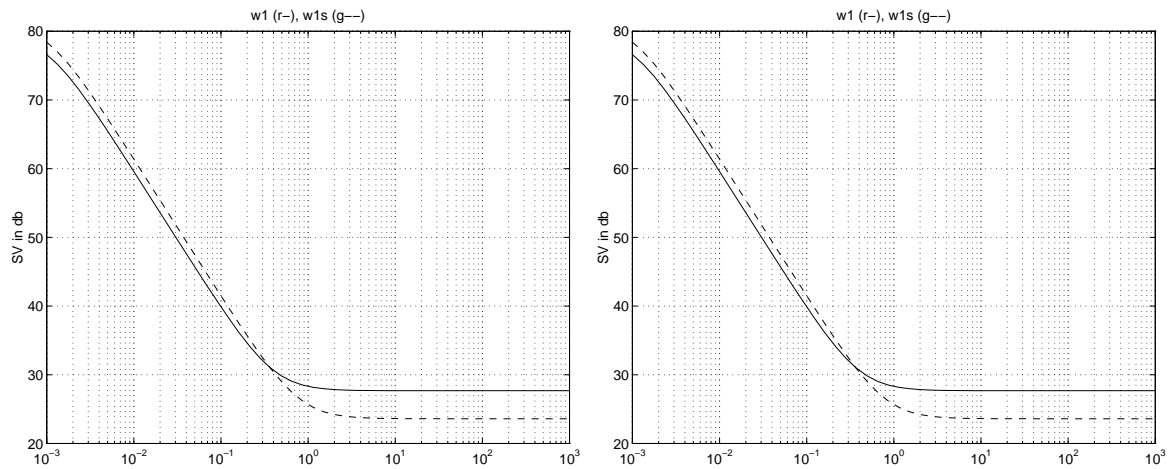


Abbildung 10: Anpassung der Gewichte: Singulärwerte der Diagonalelemente w_1 und w_2

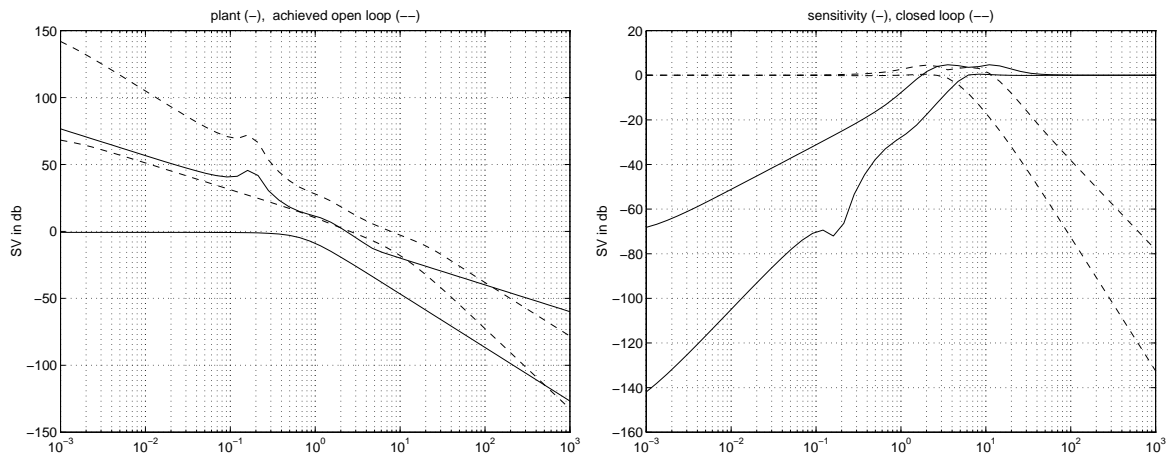


Abbildung 11: Entwurf mit angepasstem Gewicht: Größter und kleinster Singulärwert der Strecke, des offenen Kreises und der (komplementären) Empfindlichkeit.

$$\begin{aligned}
 w_{1s} &= (15.13s + 11.79)/(s + 0.001) \\
 w_{2s} &= (6.44s + 4.66)/(s + 0.001) \\
 w_{3s} &= (14.63s + 11.39)/(s + 0.001)
 \end{aligned}$$

Der Entwurf mit dem neuen Gewicht W_s erzeugt eine Stabilitätsreserve von $\epsilon = 0.3205$ und die folgende maximale Stellgröße:

$$u_{\max} = [35.2007, 8.5889, 31.4148]^T.$$

Dieser Entwurf erfüllt offensichtlich die geforderte Stellgrößenbeschränkung. Der Vollständigkeit halber sind in den Abbildungen 11 und 12 die maximalen Singulärwerte des Entwurfs zu sehen.

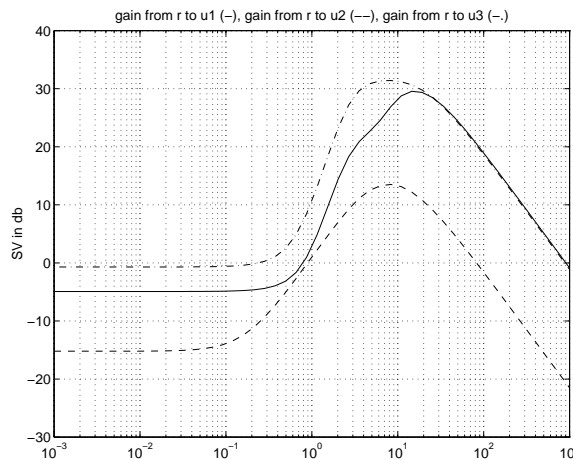


Abbildung 12: Entwurf mit angepasstem Gewicht: Singulärwerte für die einzelnen Stellgrößen.

5 Abschließende Bemerkungen

Im Abschnitt 3 wurde ein für den Ein- und Mehrgrößenfall gültiges Verfahren zum Entwurf robuster und stellgrößenbeschränkter Regelkreise vorgestellt, dessen Anwendbarkeit in Abschnitt 4 illustriert wurde. Trotzdem sind noch einige Fragen in dieser Problematik offen:

5.1 Einfache Struktur der Gewichte Im zweiten Beispiel haben wir uns auf ein “einfaches“ Diagonalgewicht anstelle von zwei vollbesetzten 3×3 Gewichten beschränkt. Diese Strategie ist wegen einer besseren Übersicht während der Entwurfsprozedur sehr zu empfehlen – weitere Empfehlungen zur Wahl der Gewichte finden sich in [7] und [8].

In Abschnitt 4.1 (erstes Beispiel) bemerkten wir, daß ein suboptimales Regler eine kleinere maximale Stellgröße produziert als ein optimaler, was unter Umständen während des Entwurfes für uns wichtig ist. Wir verallgemeinern diese Bemerkung als

5.2 Hypothese Gegeben seien zwei Regler K_i resultierend aus Entwürfen mit Performance Faktoren f_i . Es gelte $f_1 < f_2$ (K_1 ist “besser“ als K_2). Gilt dann auch $u_{2,\max} < u_{1,\max}$?

5.3 Robuste Einhaltung der Stellgrößenbeschränkung Der Entwurfsprozedur ist unmittelbar zu entnehmen, daß die Einhaltung der Stellgrößenbeschränkung nur im Fall der Nominalstrecke gewährleistet ist. Kann die Prozedur so erweitert werden, daß die Stellgrößenbeschränkung für alle zulässigen Strecken garantiert ist?

Literatur

- [1] Glover, K. *Model Reduction: A Tutorial on Hankel-Norm Methods and Lower Bounds on L^2 Errors* IFAC 10th Triennial World Congress, Munich (FRG) 1987
- [2] Green, M. and D. J. N. Limebeer *Linear Robust Control* Prentice Hall 1995
- [3] Hofer, A. *A Method for the Design of Robust Controllers* ERK 1993, Volume A, pp205-208
- [4] Lunze, J. *Robust Multivariable Feedback Control* Prentice Hall 1989
- [5] Maciejowski, J.M. *Multivariable Feedback Design* Addison Wesley 1989

- [6] McFarlane, D.C. and K. Glover *Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Description* Lecture Notes in Control and Information Science Vol. 138, Springer 1989
- [7] Raisch, J. und E.D. Gilles *Reglerentwurf mittels \mathcal{H}_∞ -Minimierung – Eine Einführung* at 40 (1992), Heft 3/92, pp84-92 und Heft 4/92, pp123-131
- [8] Raisch, J. *Mehrgrößenregelung im Frequenzbereich* Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1992
- [9] Reichel, R.W. *Synthese von Regelsystemen mit Beschränkungen bei stochastischen Eingangsgrößen* Dissertation Univ. Paderborn, 1984
- [10] Reinelt, W. *Numerische Bestimmung der maximalen Ausgangsgröße von eingangsbegrenzten Übertragungsfunktionen* Interner Bericht Univ. Paderborn, Dezember 1994
- [11] Scherer, C.W. *Lineare Matrixungleichungen in der Theorie der robusten Regelung* Automatisierungstechnik at, erscheint im Sommer 1997
- [12] Weinmann, A. *Uncertain Models and Robust Control* Springer 1991

ERRATA zu: Entwurf von robusten Regelkreisen unter der Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen*

Wolfgang Reinelt

Fachgebiet Steuerungs- und Regelungstechnik/Fachbereich Elektrotechnik
Universität Paderborn, D-33095 Paderborn
Email: Wolfgang.Reinelt@control.uni-paderborn.de

3.3 Wahl der Gewichte

Beim Loop-shaping werden im allgemeinen keine Empfehlungen gegeben, wie die Gewichte zu wählen sind, um beispielsweise eine gewisse Stabilitätsreserve ϵ zu erreichen.

Im Falle einer nicht eingehalteten Stellgrößenbeschränkung stellt sich der Sachverhalt freundlicher dar: die maximale Stellgröße kann durch Manipulation der Singulärwerte der Zeilen von $T_{ru}(s)$ beeinflusst werden.

Bei den nachfolgenden Überlegungen betrachten wir vom Mehrgrößenregelkreis nur die Übertragungsfunktion von Referenzgröße r zu Stellgröße u , die wir der Einfachheit halber bis zum Ende dieses Abschnitts $P(s)$ statt $T_{ru}(s)$ nennen:

$$\begin{aligned}u(s) &= P(s) \cdot r(s) \quad \text{oder} \\u(t) &= p(t) \star r(t)\end{aligned}$$

wobei “ \star “ die Faltung und $p(t)$ die entsprechende Gewichtsfunktion ist. Wir definieren nun die folgenden Normen:

- die ∞ -Norm einer skalaren Zeitfunktion $u(t)$:

$$\|u\|_{\infty} := \sup_{t \geq 0} |u(t)|$$

- die ∞ -Norm einer vektoriellen Zeitfunktion $r(t)$:

$$\|r\|_{\infty} := \max_i \|r_i(t)\|_{\infty}$$

- die nukleare Norm einer Übertragungsfunktion:

$$\|P\|_N := \sum_{j=1}^k \sigma_j(P)$$

wobei $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k \geq 0$ die kanonisch geordneten hankelschen Singulärwerte sind.

*Beitrag zum Tagungsband des 10. Steirischen Seminars über Regelungstechnik und Prozessautomatisierung. Leibnitz/Steiermark, 15.-18. September 1997; Errata: 6. Mai 1998

- die Einsnorm der Gewichtsfunktion:

$$\|p\|_1 := \int_0^\infty |p(t)| dt$$

Wir halten fest, daß nach Definition 3.3 die maximale Stellgröße im skalaren Fall die ∞ -Norm der Stellgröße ist und im Mehrgrößenfall komponentenweise aus solchen ∞ -Normen besteht. Wir beschränken uns daher im folgenden auf den Fall von einer Stellgröße und n Referenzgrößen. Für die ∞ -Norm gilt folgende Abschätzung [12]:

$$\|u\|_\infty \leq \|p\|_1 \|r\|_\infty. \quad (11)$$

Die Einsnorm der Gewichtsfunktion beeinflußt also unsere maximale Stellgröße. Wir suchen jetzt einen Zusammenhang zwischen der \mathcal{H}_∞ -Norm von $P(s)$ oder deren Singulärwerten und der Einsnorm der Gewichtsfunktion $p(t)$.

Nach [1] gilt im Falle einer stabilen¹ und echtrationalen Übertragungsfunktion $P(s)$:

$$2 \cdot \|P\|_N \geq \|p\|_1 \geq \|P\|_\infty. \quad (12)$$

Insgesamt ergeben die Gleichungen (11) und (12) dann die folgende Situation:

$$u_{\max} = \|u\|_\infty \leq \|p\|_1 \cdot \|r\|_\infty \leq 2 \cdot \|P\|_N \cdot \|r\|_\infty \quad (13)$$

Ist nach einem Reglerentwurf nun die maximale Stellgröße zu hoch, kann durch Absenken der nuklearen Norm der Übertragungsfunktion: $\|P\|_N$ die obere Schranke für u_{\max} verringert werden. Wegen $\|P\|_N \leq k \|P\|_\infty$ (wobei k der McMillan Grad von P ist) degeneriert Gleichung (13) zu

$$u_{\max} = \|u\|_\infty \leq 2k \cdot \|P\|_\infty \cdot \|r\|_\infty$$

Haben wir den Verlauf des (frequenzabhängigen) Singulärwertes von $P(s)$ nun gegeben, reicht es aus, diesen im (Frequenz-)Bereich um das jeweilige Maximum abzusenken, um die \mathcal{H}_∞ -Norm und damit die nukleare Norm insgesamt zu verkleinern.

¹Stabilität ist wegen der internen Stabilität des Regelkreises keine Einschränkung.