

# **DIPLOMARBEIT**

## **Entwurf optimaler Regler bei amplitudenbeschränkten Systemgrößen**

Vorgelegt von:  
Wolfgang Reinelt  
Langenohlgasse 2  
33098 Paderborn

Betreut von:  
Prof. Dr.-Ing. N. Dourdoumas und Dr.-Ing. D. Holtgrewe  
Theorie der Automatisierungssysteme, Universität Paderborn

Paderborn, November 1993.

# Einleitung

Bei der Lösung vieler Probleme treten aus den verschiedensten Gründen Einschränkungen auf, die die an sich einfache Lösung unerwartet verkomplizieren. Vielleicht auch deshalb prägte schon Johann Wolfgang von Goethe den vielzitierten Satz

*“ In der Beschränkung zeigt sich erst der Meister.“*<sup>1</sup>

Ein Beispiel für das Auftreten von solchen Beschränkungen ist der Entwurf von Reglern für ein technisches System, das Beschränkungen hinsichtlich der Eingangsgröße enthält.

Warum ist diese Aufgabenstellung wichtig?

In jedem physikalischen System existieren Systemgrößen, die aufgrund einfacher physikalischer Gegebenheiten in ihrem Verhalten beschränkt sind. Solche Beschränkungen können aus rein geometrischen oder mechanischen Gründen (zum Beispiel maximale Anschläge), aus Gründen der Empfindlichkeit (zum Beispiel zu hohe Eingangsgrößen in Meßgeräten) oder aus energetischen Gründen vorliegen.

Diese große Menge an Beschränkungen kann man in zwei Kategorien trennen. Zum einen gibt es die Klasse der harten Beschränkungen, d.h. an die Systemgröße wird die Forderung gestellt, daß sie zu keinem Zeitpunkt einen vorgegebenen Wertebereich verlassen darf.

Zum anderen gibt es die Klasse der weichen Beschränkungen, bei denen die Systemgröße beispielsweise im quadratischen Mittel einen vorgegebenen Wert nicht überschreiten darf.

Soll nun einem solchen System mit Beschränkungen durch einen Regler ein bestimmtes Verhalten aufgezwängt werden, müssen die vorhandenen Beschränkungen quantitativ erfaßt und direkt im Entwurf des Reglers berücksichtigt werden.

Ziel dieser Arbeit ist ein Entwurfssystem zur Synthese eines linearen Reglers, das vorhandene Beschränkungen in den Amplituden von Systemgrößen explizit berücksichtigt.

Zugrundegelegt wird ein einschleifiger Standardregelkreis, dessen Führungsgröße in dem Sinne beschränkt ist, daß sie und ihre erste zeitliche Ableitung betragsmäßig beschränkt sind. Der Regler ist so zu entwerfen, daß die maximale Amplitude der Stellgröße einen bestimmten Wert nicht überschreitet, wobei die maximale Amplitude der Regeldifferenz möglichst klein zu halten ist.

Die Lösung dieser Aufgabe umfaßt im wesentlichen zwei Teilprobleme:

Vor dem eigentlichen Entwurf des Reglers stellt sich das Problem, die maximale Ausgangsamplitude eines asymptotisch stabilen und linearen Übertragungsgliedes zu ermitteln, wenn die Eingangsgröße und ihre zeitliche Ableitung beschränkt sind. Diese Aufgabe wird von dem vorgestellten Balkenverfahren im Teil I der Arbeit gelöst.

---

<sup>1</sup>Johann Wolfgang von Goethe in 'Kunst und Natur'. Zitiert nach: Goethe - Sämtliche Werke, Münchner Ausgabe, Carl Hanser Verlag, München 1985

Um für eine gegebene Regelstrecke denjenigen Regler zu finden, der bei maximaler Stellgrößen- auslastung die kleinste maximale Amplitude in der Regeldifferenz erzeugt, kann man nun alle Regler, die diese Strecke stabilisieren, parametrisieren und dann die Synthesaufgabe als konvexes Optimierungsproblem lösen. Die numerische Lösung dieses Optimierungsproblems liefert dann den gewünschten Regler. Da dieser Regler im allgemeinen eine hohe Ordnung besitzt, kann man anschließend versuchen, die Ordnung des Reglers zu verkleinern, was den Vorteil der leichteren prüfbarkeit und Interpretierbarkeit der einzelnen Parameter aufweist.

Hierbei muß beachtet werden, daß nach der Reglerreduktion der mit dem reduzierten Regler geschlossene Regelkreis noch vernünftige Eigenschaften hat, d.h. hier insbesondere, daß die vorgegebenen Beschränkungen nicht überschritten werden und die maximale Amplitude der Regeldifferenz nicht wesentlich größer wird. Die hierzu nötige Theorie wird im Teil II der Arbeit vorgestellt und anschließend anhand von Beispielen getestet.

# Inhaltsverzeichnis

I	Bestimmung der maximalen Ausgangsamplitude eines Übertragungssystems mit dem Balkenverfahren	1
1	Theoretische Grundlagen des Balkenverfahrens	3
2	Numerische Grundlagen des Balkenverfahrens	7
3	Beispiele zum Balkenverfahren	17
II	Entwurf des optimalen Reglers und Modellreduktion	25
4	Reglerparametrisierung	29
5	Formulierung des Optimierungsproblems	33
6	Ordnungsreduktion des Reglers	37
7	Beispiele zum Entwurf des Reglers	43



## Teil I

# Bestimmung der maximalen Ausgangsamplitude eines Übertragungssystems mit dem Balkenverfahren



# Kapitel 1

## Theoretische Grundlagen des Balkenverfahrens

Gegenstand dieses Kapitels ist die **Ermittlung des Amplitudenmaximums** eines Übertragungsgliedes, dessen Eingangsgröße Beschränkungen unterliegt. Geschildert wird nur die grundlegende Idee und eine heuristische Herleitung. Für die exakten Beweise sei auf [21] verwiesen.

Die Herleitung gilt unter den folgenden **Voraussetzungen**: Gegeben sei ein Übertragungssystem (durch seine Gewichtsfunktion  $g(t)$ ), das die BIBO-Eigenschaft besitzt, mit der Eingangsgröße  $r(t)$  und der Ausgangsgröße  $y(t)$ . Die Eingangsgröße sei wie folgt beschränkt:

$$\left. \begin{array}{l} r(t) = 0 \\ |r(t)| \leq R \\ |\dot{r}(t)| \leq \dot{R} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{für } t \leq 0 \\ \text{für } t > 0 \end{array}$$

Im folgenden seien alle Größen, die diese Eigenschaften erfüllen, als *zulässige Eingänge* bezeichnet.

Falls alle Anfangswerte Null sind, berechnet sich die Ausgangsgröße  $y(t)$  durch das Faltungsintegral

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)r(t-\tau)d\tau.$$

Führt man für die zeitinvertierte Eingangsgröße die Abkürzung  $r_t(\tau) := r(t-\tau)$  ein, so geht das Faltungsintegral über in

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)r_t(\tau)d\tau,$$

mit den Beschränkungen für die zeitinvertierte Eingangsgröße:

$$\left. \begin{array}{l} r_t(\tau) = 0 \\ |r_t(\tau)| \leq R \\ |\dot{r}_t(\tau)| \leq \dot{R} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{für } \tau \geq t \\ \text{für } \tau < t \end{array}$$

Um die maximale Ausgangsamplitude zu ermitteln, bestimmt man zuerst denjenigen unter allen zulässigen Eingängen  $r_t(\tau)$ , dessen Ausgang  $y(t)$  das Maximum im Bereich  $0 \leq t < \infty$  erzeugt.



Wie man leicht zeigen kann, tritt das Amplitudenmaximum für  $t \rightarrow \infty$  auf. Mit den Regeln der partiellen Integration und unter der Berücksichtigung, daß die Gewichtsfunktion die zeitliche Ableitung der Sprungantwort ist, folgt dann für das Amplitudenmaximum:

$$Y = \left| \int_0^{\infty} s(\tau) \dot{r}_0(\tau) d\tau \right| \quad (1.1)$$

Dabei bezeichnet  $r_0(t)$  den optimalen zeitinvertierten Eingang, d.h. denjenigen Eingang, dessen Ausgang im Unendlichen gegen das Amplitudenmaximum  $Y$  strebt.

Im folgenden besteht das Problem darin, den optimalen Eingang so zu ermitteln, daß der Wert des Faltungsintegrals 1.1 möglichst groß wird. Für die Ermittlung des Eingangs wird das Faltungsintegral 1.1 zugrundegelegt; ermittelt wird also der Verlauf der zeitlichen Ableitung des Einganges.

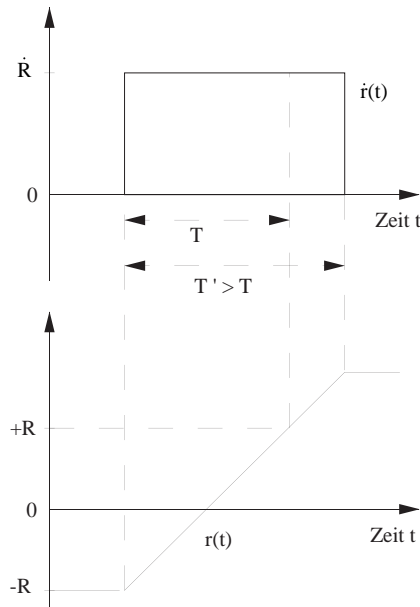
Man kann nun zeigen, daß die zeitliche Ableitung des Eingangs folgende Eigenschaften besitzt:

Die zeitliche Ableitung nimmt nur die Werte  $\pm \dot{R}$  oder 0 an. In denjenigen Bereichen, wo der Wert Null vorliegt, nimmt der Eingang den Wert  $\pm R$  an. Der Verlauf der Ableitung ist also 'pulsartig'. Im Unendlichen nimmt die (zeitinvertierte) zeitliche Ableitung den Wert  $\pm \dot{R}$  an, der Eingang selbst nimmt den Wert Null an.

Da der Eingang  $r(t)$  betragsmäßig begrenzt ist, darf die Ableitung nicht beliebig lange den maximal erlaubten Wert annehmen, da sonst der erlaubte Amplitudenbereich überschritten wird. Man überlegt sich leicht, daß aus  $|r(t_2) - r(t_1)| \leq 2R$  und  $\left| \int_{t_1}^{t_2} \dot{r}(\tau) d\tau \right| = |t_2 - t_1| \dot{R}$  für  $\dot{r}(t) = \dot{R}$  für die maximale Pulsbreite  $T$  folgt:  $T := |t_2 - t_1| = 2 \frac{R}{\dot{R}}$ .

Aus demselben Grund müssen zwei aufeinanderfolgende Pulse maximaler Pulsbreite unterschiedliches Vorzeichen haben.

In der nachfolgenden Skizze ist der Fall dargestellt, daß die gewählte Pulsbreite  $T'$  größer ist als die maximale Pulsbreite  $T$ .



Der Verlauf der zeitlichen Ableitung des Eingangs ist also bis auf die Lage der Pulse festgelegt. Die Pulse positioniert man nun derart, daß der Wert des Faltungsintegrals 1.1 möglichst groß wird. Setzt man der Einfachheit halber  $s(t) > 0$  voraus, so wird dieses sicherlich dadurch gewährleistet, daß man in 1.1 die Maxima der Sprungantwort stärker gewichtet als die Minima. Legt man also unter

das erste Maximum einen positiven Puls und will man den Integralwert noch steigern, so muß man auch unter das zweite Maximum einen positiven Puls legen. Da aber zwei aufeinanderfolgende Pulse unterschiedliches Vorzeichen haben müssen, muß zwischen den beiden Pulsen unter den Maxima ein negativer Puls plaziert werden. Diesen plaziert man im Minimum, da dann der Wert von 1.1 sowenig wie möglich verringert wird. Man kann sich dann davon überzeugen, das sich 1.1 wirklich vergrößert, wenn man statt eines Maximums zwei Maxima und ein Minimum gewichtet. Die Fortführung dieser Überlegung führt dann dazu, daß man alle Maxima der Sprungantwort mit einem positiven Puls und alle Minima mit einem negativen Puls gewichtet.

Aus weiteren Überlegungen folgt nun, daß die Funktionswerte der Sprungantwort im rechten und linken Randpunkt des Pulses gleich sein müssen.

Liegen nun die Extrema der Sprungantwort so weit auseinander, daß man die maximale Pulsbreite von  $T = 2\frac{R}{\dot{R}}$  wählen kann, ohne daß sich zwei benachbarte Pulse überlappen, ist schon eine Strategie für die Berechnung des Amplitudenmaximums gefunden.

Mit Hilfe des Faltungsintegrals (1.1) folgt dann :

Falls das System die BIBO-Eigenschaft besitzt, gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\frac{T}{2}}^t s(\tau) d\tau = \frac{T}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \frac{R}{\dot{R}} \lim_{t \rightarrow \infty} s(t).$$

Aufgrund des Verlaufs der zeitlichen Ableitung geht dann das Faltungsintegral 1.1 über in

$$Y = \left| \dot{R} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \int_{x_i}^{y_i} s(t) dt + R(-1)^n \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) \right| \quad (1.2)$$

Die Kenntnis der Umschaltzeitpunkte  $t_i$  ermöglicht somit die exakte Berechnung der maximalen Ausgangsamplitude.



## Kapitel 2

# Numerische Grundlagen des Balkenverfahrens

Die im letzten Kapitel hergeleiteten Eigenschaften lassen sich zur Konstruktion eines numerischen Verfahrens verwenden (vergleiche dazu auch [3] und [21]).

Im wesentlichen hat die zeitliche Ableitung des Eingangs die folgenden Eigenschaften:

1. Unter die Maxima der Impulsantwort werden positive, unter die Minima werden negative Pulse gelegt.
2. Im Unendlichen kommt ein weiterer **halber Puls** dazu (beachte dazu das Faltungsintegral 1.2).
3. In den Randpunkten eines Pulses müssen die Funktionswerte der Sprungantwort übereinstimmen.
4. Die Pulsbreite darf eine, durch die Beschränkungen des Eingangs vorgegebene, maximale Breite nicht überschreiten.

Vor allem die dritte Eigenschaft führt auf die folgende **Grundidee des 'Balkenverfahrens'**:  
(Der Einfachheit halber sei im folgenden die Sprungantwort als positiv vorausgesetzt.)

Berechne zuerst die Extrema der Sprungantwort als die Nullstellen der Gewichtsfunktion.

Da im allgemeinen die Übertragungsfunktion des Systems im Frequenzbereich vorliegen wird, lassen sich beide Zeitfunktionen einfach als inverse Laplacetransformierte gewinnen.

Lege dann unter jedes Extremum einen schmalen Balken derart, daß die oberen Eckpunkte des Balkens Punkte des Graphen der Sprungantwort sind und daß sich benachbarte Balken nicht überschneiden.

Nähme man die so gewonnenen Zeitintervalle als Intervalle für die Pulse, so wären die Forderungen (3) und (4) schon erfüllt. Allerdings läßt sich der Wert des Faltungsintegrals 1.2 noch vergrößern, und zwar durch Verbreiterung der Balken. Verbreitert man die Balken, bis die maximale Pulsbreite  $T$  erreicht ist, so ist das Problem für den Fall gelöst, daß sich keine benachbarten Balken überlappen. Das ist deshalb von Bedeutung, weil zwei aufeinanderfolgende Pulse verschiedenes Vorzeichen haben müssen. Bei einer Überschneidung der beiden Pulse läge dann aber eine Zweideutigkeit in der Pulshöhe vor, die natürlich zu vermeiden ist.

Eine einfache Beziehung für die **Verbreiterung der Balken** von einem Iterationsschritt zum nächsten ergibt sich aus den Taylornäherungen der Sprungantwort in den Randpunkten des Balkens.

Es gilt für den rechten Randpunkt  $t_2$ :

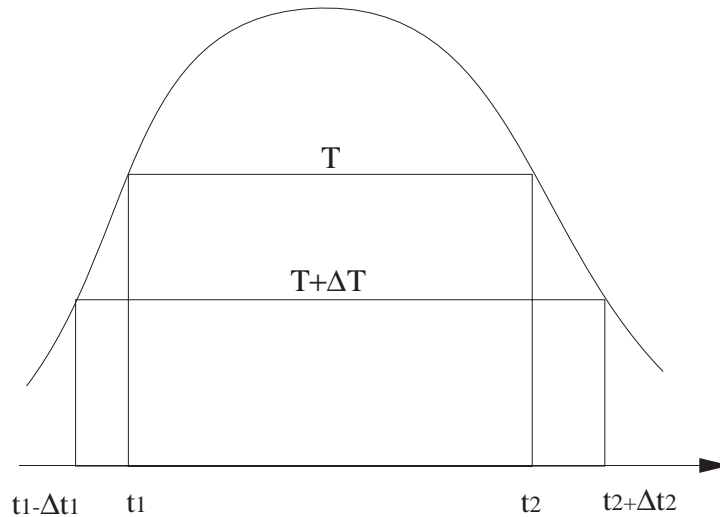
$$s(t_2 + \Delta t_2) \approx s(t_2) + \dot{s}(t_2)\Delta t_2 = s(t_2) + g(t_2)\Delta t_2.$$

Analoges gilt im linken Randpunkt  $t_1$ . Aus der Forderung, daß der Balken insgesamt um den Wert  $\Delta T$  verbreitert werden soll,  $\Delta t_1 + \Delta t_2 = \Delta T$ , und aus der Tatsache, daß die Funktionswerte in den neuen Eckpunkten gleich sein sollen,  $s(t_1 - \Delta t_1) = s(t_2 + \Delta t_2)$  folgt schließlich für die Verbreiterung nach rechts  $\Delta t_1$  und nach links  $\Delta t_1$ :

$$\Delta t_2 \approx \frac{\Delta T}{1 + \left| \frac{g(t_2)}{g(t_1)} \right|} \quad (2.1)$$

$$\Delta t_1 = \Delta T - \Delta t_2 \approx \frac{\Delta T}{1 + \left| \frac{g(t_1)}{g(t_2)} \right|} \quad (2.2)$$

Die Ränder des neuen Balkens sind dann  $t_1 - \Delta t_1$  und  $t_2 + \Delta t_2$  (siehe Skizze).



Diese Vorgehensweise ist zwar einfach, jedoch besonders bei solchen Extrema, deren Funktionsverlauf in einer Umgebung des Extremums unsymmetrisch zur Achse durch das Extremum ist, wirkt sich die fehlende Information über das Funktionsverhalten negativ auf die Genauigkeit der in 2.1 und 2.2 errechneten Werte aus.

Abhilfe schafft die folgende verbesserte Verbreiterungsvorschrift (siehe [3]):

Führt man eine Vorlaufrechnung durch, ermittelt man also durch die Verbreiterungsvorschrift 2.1 und 2.2 die Werte  $\Delta t_1$  und  $\Delta t_2$ , so hat man einen vernünftigen Anhaltspunkt für die Verbreiterung. Jetzt kann man aber die Werte der Ableitung bis zu den Vorlaufwerten  $t_1 - \Delta t_1$  und  $t_2 + \Delta t_2$  berücksichtigen. Diese kann man dann ähnlich dem Runge-Kutta-Verfahren dritter Ordnung kombinieren:

$$\widehat{g(t_1)} = \frac{1}{6} \left( g(t_1) + 4g\left(t_1 + \frac{\Delta t_1}{2}\right) + g(t_1 + \Delta t_1) \right)$$

Analog berechnet man die verbesserte Steigung im rechten Randpunkt. Dann kann man, ähnlich wie in 2.1 und 2.2 die bessere Verbreiterung berechnen:

$$\Delta t_{1,besser} \approx \frac{\Delta T}{1 + \left| \frac{\widehat{g(t_1)}}{g(t_2)} \right|}$$

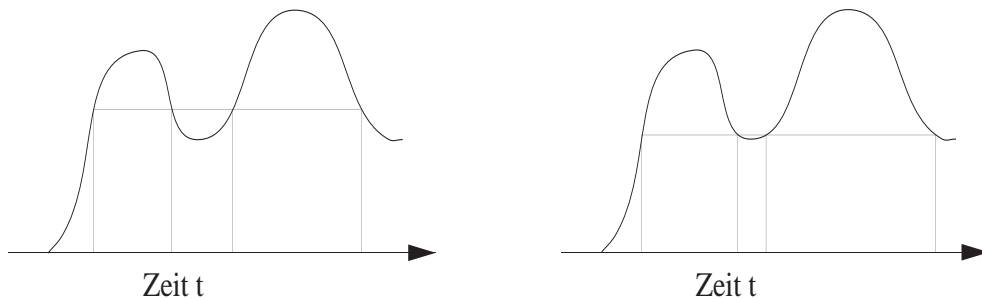
analog für den rechten Randpunkt. Mittels dieser Beziehungen kann man jetzt die Balken so lange verbreitern, wie sich zwei benachbarte Balken nicht überschneiden, um Mehrdeutigkeiten auszuschließen.

Berühren sich im Zuge der Verbreiterung der Balken zwei benachbarte Balken, so spricht man vom **Zusammenstoß** der Balken zu einer **Balkengruppe**. Bei der nächsten Verbreiterung wird diese Gruppe als Einheit betrachtet.

Für den Zusammenstoß von zwei oder mehr Balken zu einer Gruppe gelten die folgenden Überlegungen (diese anschaulichen Überlegungen können auch bewiesen werden, [21]) :

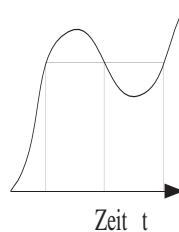
1. Beim Zusammenstoß von einer ungeraden Anzahl von Balken zu einer Gruppe ist in dieser Gruppe entweder ein Maximum oder ein Minimum mehr vorhanden. Jenachdem kann man also die ganze Gruppe als ein **Maximumgebirge** oder ein **Minimumgebirge** werten. Bei einem 'Maximumgebirge' z.B. müssen dann durch weitere Verbreiterungsschritte die Maxima stärker gewichtet werden, d.h. deren Balken verbreitert werden, um den Wert des Faltungsintegrals zu erhöhen. Da sich aber die Balken nicht überschneiden dürfen, müssen gleichzeitig die Balken unter den Minima entsprechend schmaler gewählt werden.

Drei Balken stoßen zusammen und die beiden äußeren Balken werden verbreitert:



2. Beim Zusammenstoß von einer geraden Anzahl von Balken zu einer Gruppe wird die Verbreiterung zumindest so lange gestoppt, wie die Anzahl der Balken in der Gruppe gerade ist (d.h. bis zum Dazustoßen eines weiteren Balkens). Da in dieser Gruppenkonstellation kein Maximum oder Minimum überwiegt, kann die gesamte Gruppe auch nicht als ein solches gewertet werden.

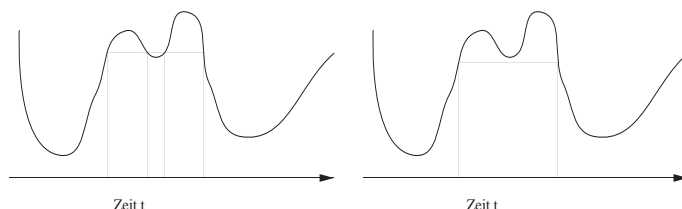
Stop der Verbreiterung nach dem Zusammenstoß von zwei Balken:



3. Im Zuge der Verbreiterungen und Verschmälerungen in einer Gruppe mit einer ungeraden Anzahl von Balken kann es vorkommen, daß ein **Balken verschwindet**.

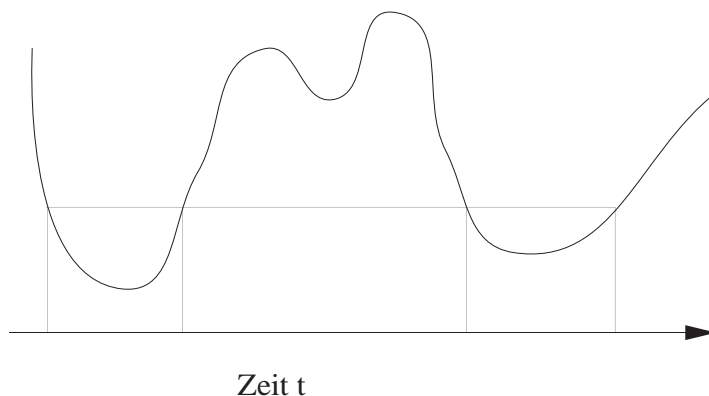
Dies ist z.B. der Fall, wenn in einer Maximumsgruppe ein Minimum die Breite Null erreicht. Bei der folgenden Verbreiterung sinkt dann die Balkenhöhe unter den Wert der Sprungantwort

an der Stelle des Minimums. Dann faßt man die Gruppe aus den beiden Maxima und dem Minimum zu einem Maximum mit einem Balken darunter zusammen, schließt also z.B. die rechten beiden Extrema von den nachfolgenden Verbreiterungen aus und verbreitert nur noch den gesamten Balken.

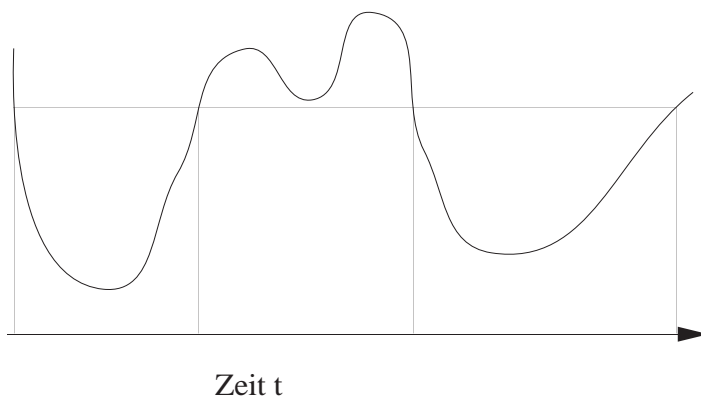


4. Nachdem die Situation (3) eingetreten ist, kann es theoretisch passieren, daß ein ver schwundener Balken wieder auftaucht. Das ist z.B. dann der Fall, wenn an eine Gruppe von zwei Maxima und einem (verschundenen) Minimum von links und rechts je ein Minimum stoßen. Dann wird die so entstandene Gruppe insgesamt als Minimum be trachtet und die Balkenhöhe steigt wieder. Falls die Balkenhöhe dann über den Wert der Sprungantwort an der Stelle des verschwundenen Minimums steigt, muß das ver schwundene Minimum wieder berücksichtigt und eigenständig verbreitert werden.

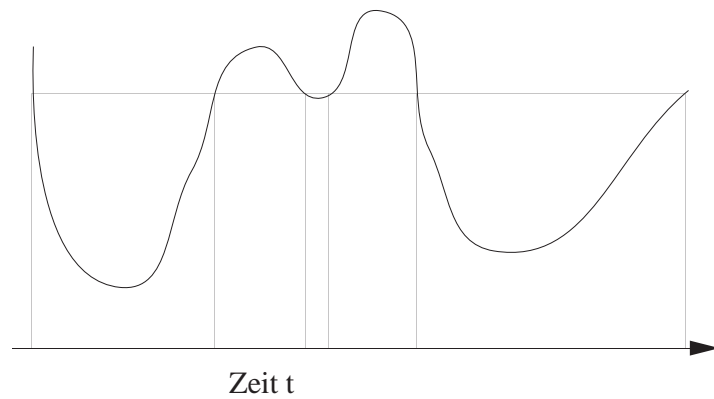
(a) Die Dreiergruppe in der Mitte stößt mit den beiden Einzelbalken zusammen.



(b) Die beiden äußeren Balken werden verbreitert.

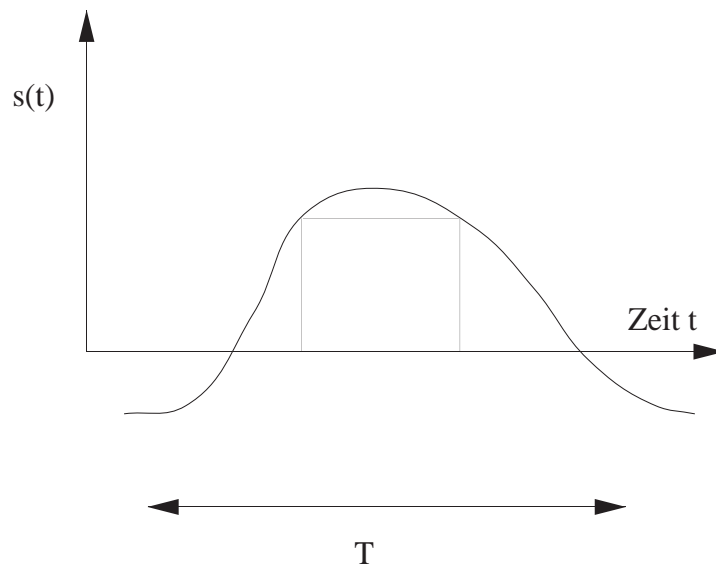


(c) Die Dreiergruppe 'zerlegt' sich in ihre Einzelbalken.



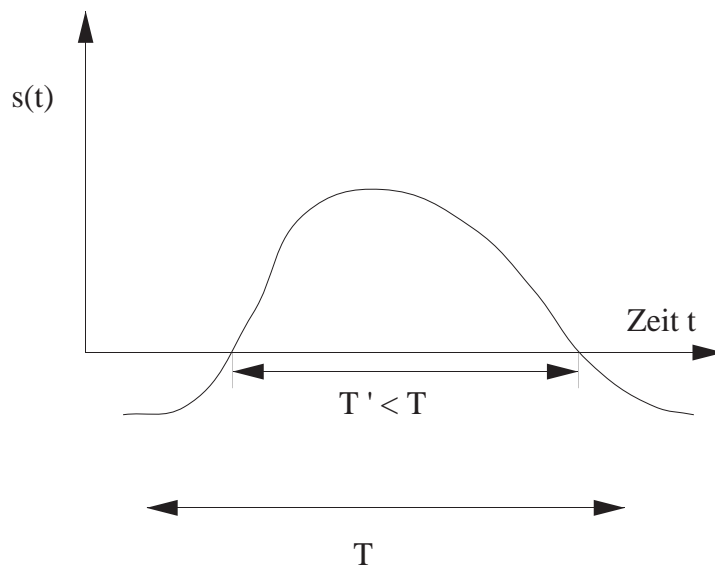
5. Falls ein Extremum der Sprungantwort zwischen zwei Nullstellen liegt und der Abstand dieser beiden Nullstellen kleiner ist als die maximal zulässige Balkenbreite, darf die Balkenverbreiterung nicht über die Nullstellen hinausgehen, da sonst der Wert des Teilintegrals wieder kleiner wird.

(a) Balken zwischen zwei Nullstellen wird verbreitert.





(b) Balkenverbreiterung stoppt bei Erreichen der Nullstellen.



6. Falls nach einem Verbreiterungsschritt nur noch Gruppen mit einer geraden Anzahl von Elementen vorliegen, ist der Verbreiterungsalgorithmus beendet, obwohl eventuell die maximale Balkenbreite noch nicht erreicht ist.

Diese Überlegungen sollen an folgendem **Beispiel** verdeutlicht werden :

Bild 1 : Die initialen Balken sind unter die Extrema gelegt worden.

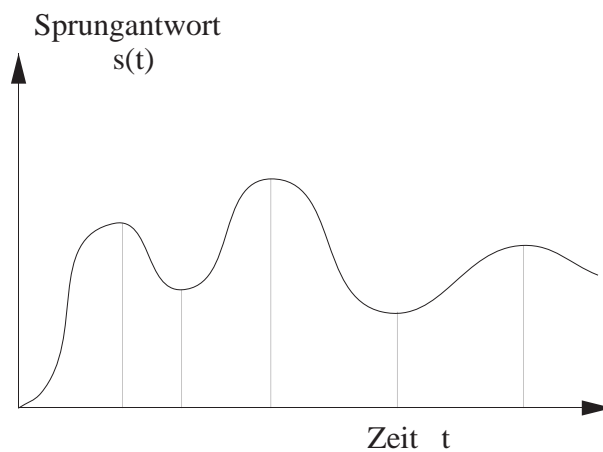


Bild 2 : Die Balken sind verbreitert worden.

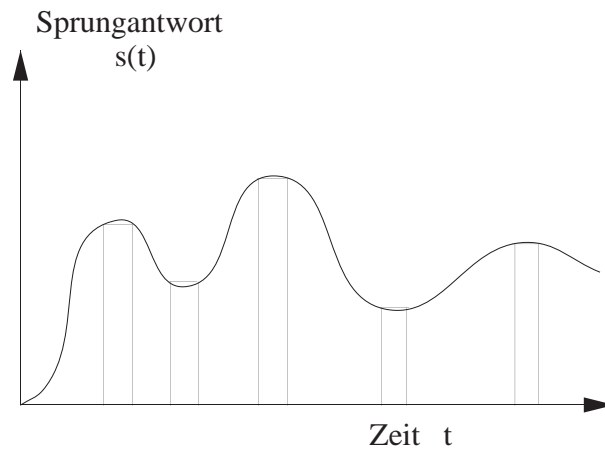


Bild 3 : Balken 1 und 2 sind zusammengestoßen. Diese Balkengruppe wird vorerst nicht weiterverbreitert.

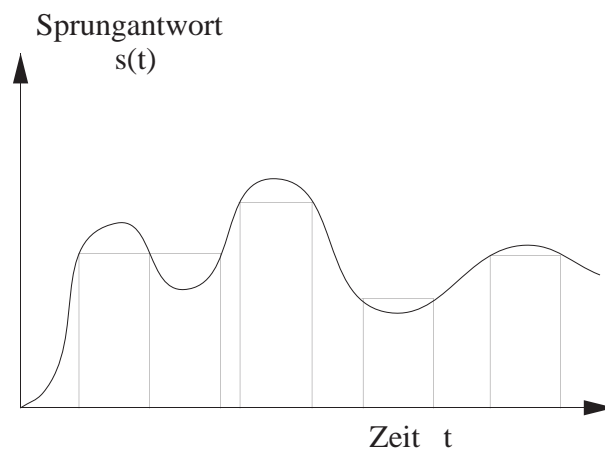


Bild 4 : Weitere Zusammenstöße. Die erste Gruppe wird weiterverbreitert, die zweite nicht.

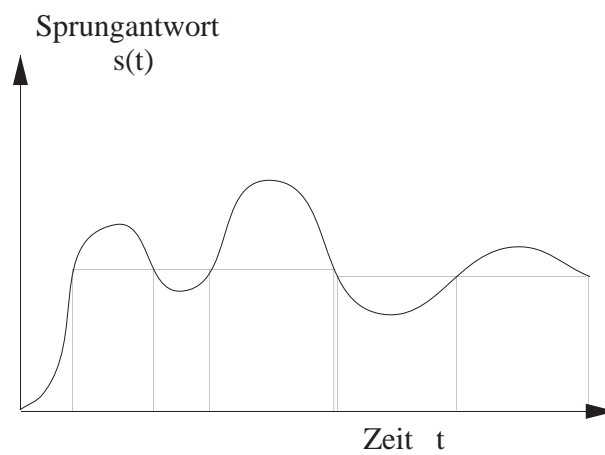


Bild 5 : Die beiden Gruppen sind zusammengestoßen. Balken zwei verschwindet in den nächsten Schritten.

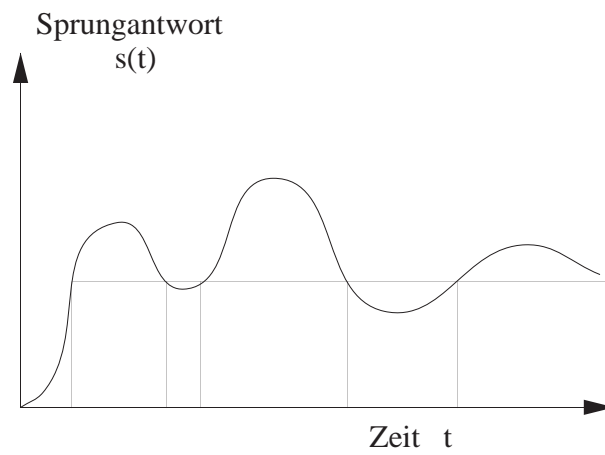


Bild 6 : Balken 2 ist verschwunden.

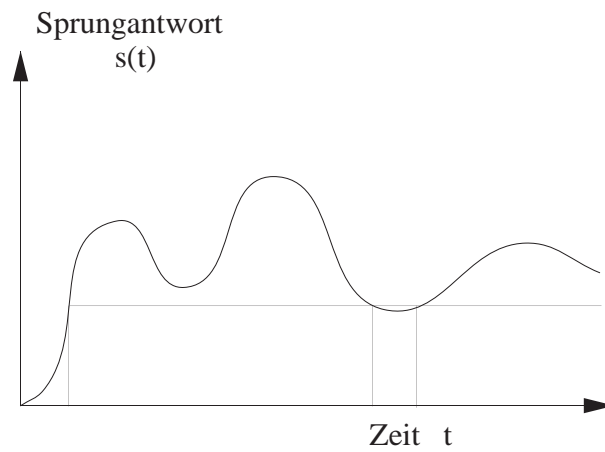


Bild 7 : Ende des Balkenverfahrens, da die maximale Balkenbreite erreicht ist.

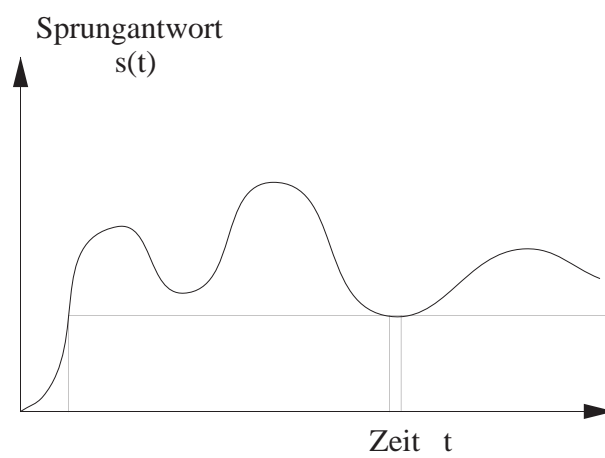
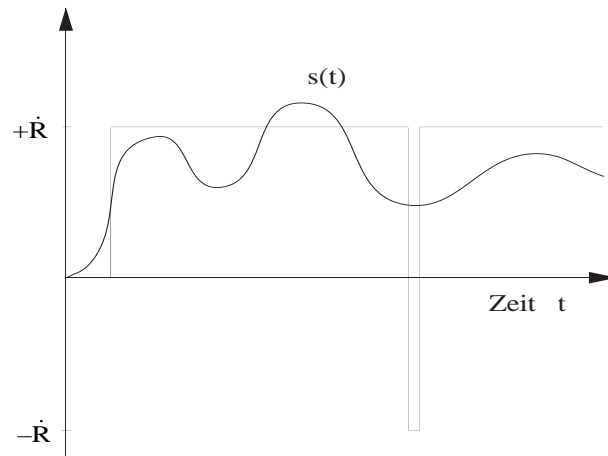


Bild 8 : Positionierung der Pulse.



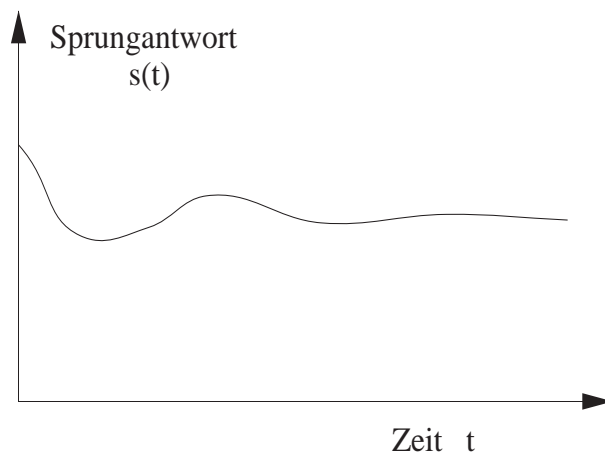
Zusätzlich zu den bisherigen Überlegungen sind noch einige Spezialfälle zu betrachten :

1. Die Übertragungsfunktion hat die Ordnung Null, d.h.  $G(s) = c$ .  
Dann berechnet sich die maximale Ausgangsamplitude sofort zu  $Y = cR$ .
2. Die Sprungantwort weist keine Extrema auf. Dann ergibt sich:  $Y = G(0)R$ .
3. Ist die Beschränkung  $R$  für den Eingang Null, so ist auch  $Y = 0$ .
4. Das System besitzt nicht die BIBO-Eigenschaft: die Betrachtung solcher Systeme ist hier nicht sinnvoll.
5. Die Höhe des ersten Balkens wird zu Null. Da die Sprungantwort für negative Zeiten den Wert Null hat, braucht der erste Balken in diesem Falle nicht mehr verbreitert zu werden.
6. Das System ist sprunghfähig und der erste Balken stößt an den Zeitwert Null. In diesem Falle braucht der erste Balken dann nur noch nach rechts verbreitert zu werden.
7. Für unendliche Zeit taucht im Faltungsintegral 1.2 ein halber Puls auf. Um dessen Beitrag für 1.2 zu bestimmen benötigt man den Endwert der Sprungantwort. Diesen berechnet man sinnvollerweise aus dem Endwertsatz der Laplacetransformation.

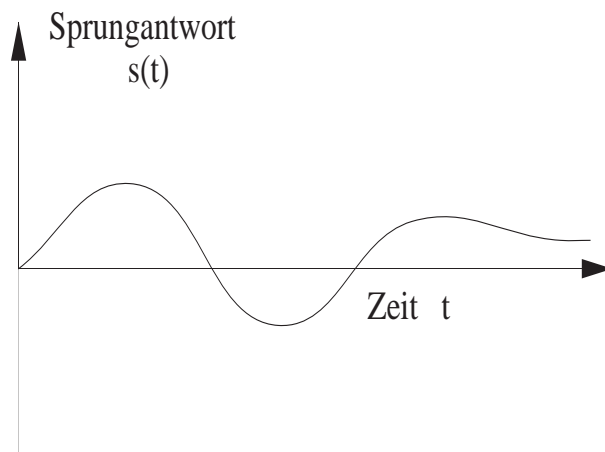
Wesentlich für das Balkenverfahren ist auch die Bestimmung aller **Nullstellen der Gewichtsfunktion**.

Im allgemeinen wird die Gewichtsfunktion auf Sinus- und Cosinusschwingungen bestehen, d.h. es existieren unendlich viele Nullstellen. Da für das Balkenverfahren nur Systeme mit BIBO-Eigenschaft zugelassen sind, muß die Gewichtsfunktion für unendliche Zeiten gegen Null streben. Hier ersetzt man dann einfach den Wert Null durch eine der Maschinengenauigkeit angepaßte, hinreichend kleine, betragsmäßige Schranke.

In bestimmten Fällen muß bei sprunghfähigen Systemen der Wert  $t = 0$  durch einen Balken berücksichtigt werden. Das ist genau dann der Fall, wenn es sich bei dem Wert  $t = 0$  um ein Randextremum handelt, z.B. also für den Fall, daß  $s(0) > 0$  ist, und die Sprungantwort dann wieder abfällt.



Ist hingegen das System nicht sprungfähig, ist  $t = 0$  in keinem Falle durch einen Balken zu berücksichtigen.



Bei der numerischen Bestimmung der Nullstellen bzw. bei der Auswahl eines entsprechenden Verfahrens ist die Genauigkeit der berechneten Nullstelle nicht primär, da unter das Extremum sowieso ein verhältnismäßig breiter Balken gelegt wird. Hier ist eher ein schnelles Verfahren vorzuziehen. Damit sind alle zu berücksichtigenden Fälle des Balkenverfahrens abgedeckt.

## Kapitel 3

# Beispiele zum Balkenverfahren

Das Programm `maxout()` wurde unter anderem mit den Beispielen aus [3] getestet. Die Klammerwerte bei den maximalen Beträgen der Ausgangsgröße geben die Resultate aus [3] an.

Die Rechenzeiten sind mit der `MATLAB`-Routine `clock()` ermittelt worden und beziehen sich auf die Programmausführung ohne Ausgabe von Zwischenwerten und ohne anschließende Zeichnung.

Die Testläufe wurden auf einem *Macintosh Quadra 700* durchgeführt.

1. Für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s^2 + 0.4}{s^2 + 1.4s + 1.0}$$

mit den Beschränkungen

$$R = 1.0$$

$$\dot{R} = 0.8$$

ergibt sich als maximaler Betrag der Ausgangsgröße:

$$y = 0.7610 \quad (0.7611)$$

in einer Rechenzeit von 1.0 Sekunden.

Bild 1 : Initialisierung der Balken

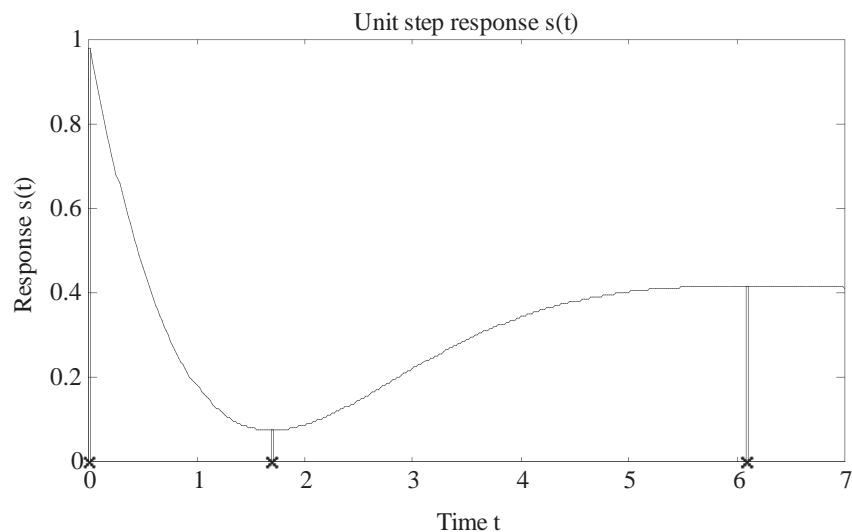


Bild 2 : Balken 1 und 2 kurz nach dem Zusammenstoß (Iterationsschritt 3)

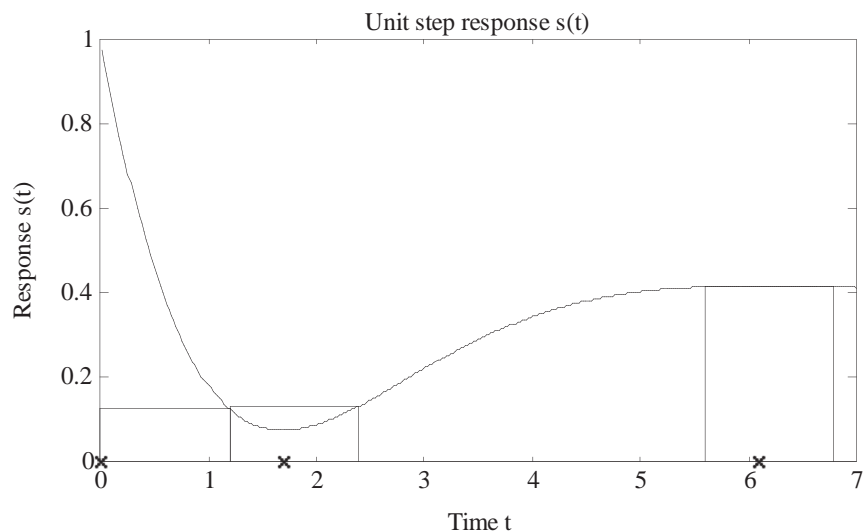
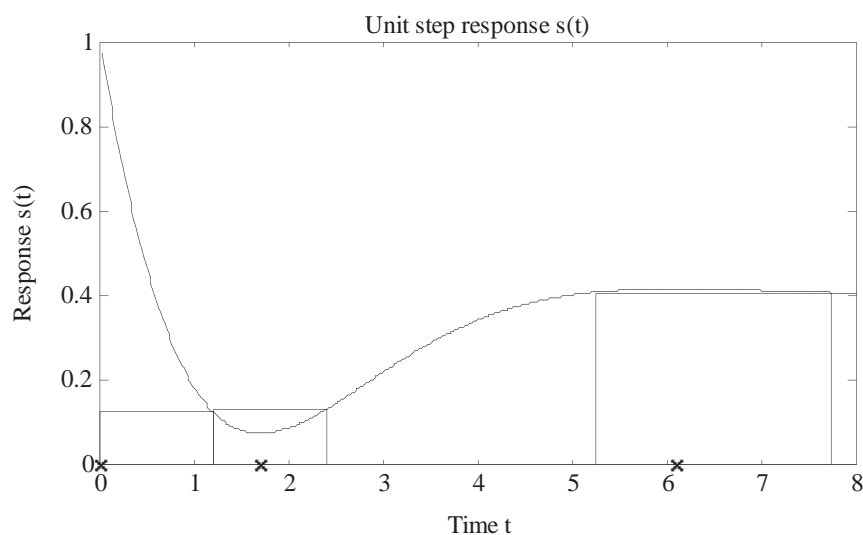


Bild 3 : Ende des Balkenverfahrens



2. Für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s^7 + 22.2s^6 + 188.7s^5 + 1033.45s^4 + 11852.92s^3 + 12929s^2 + 16179s - 85.98}{s^7 + 22.2s^6 + 300.28s^5 + 2214.98s^3 + 37084.82s^2 + 76829.24s + 65032.96}$$

mit den Beschränkungen

$$\begin{aligned} R &= 1.0 \\ \dot{R} &= 0.0637 \end{aligned}$$

ergibt sich als maximaler Betrag der Ausgangsgröße:

$$y = 0.0631 \quad (0.06867)$$

in einer Rechenzeit von 16.4 Sekunden.

Bild 1 : Initialisierung der Balken

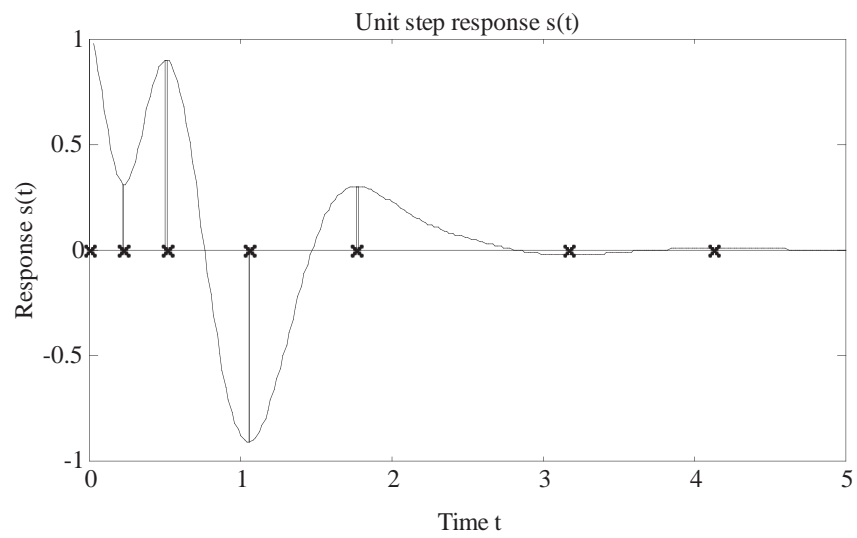


Bild 2 : Balken 1 und 2 stoßen mit Balken 3 zusammen (Iterationsschritt 13)

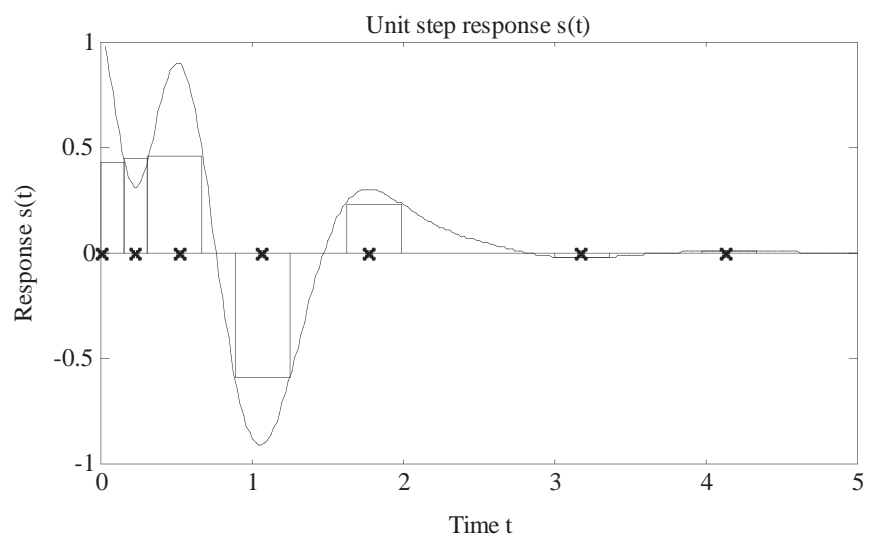




Bild 3 : Balken 2 verschwindet im nächsten Schritt (Iterationsschritt 24)

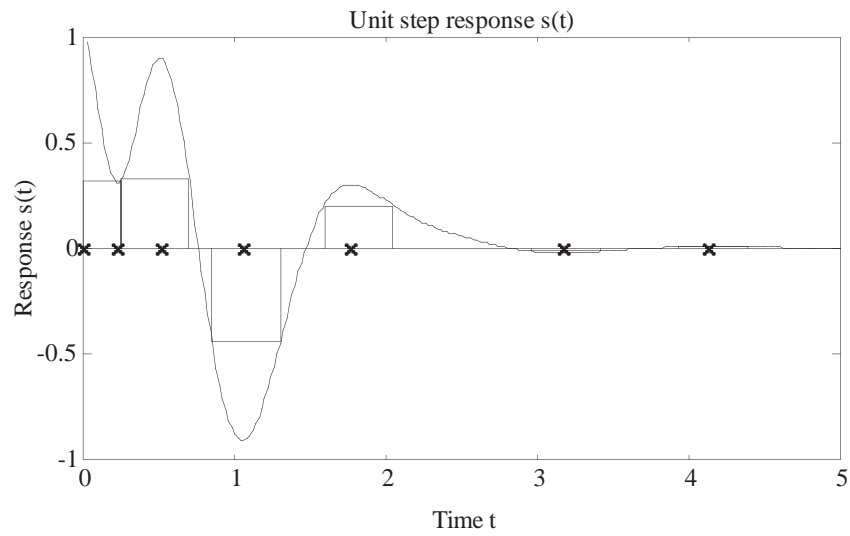


Bild 4 : Balken 2 ist verschwunden, (Iterationsschritt 28)

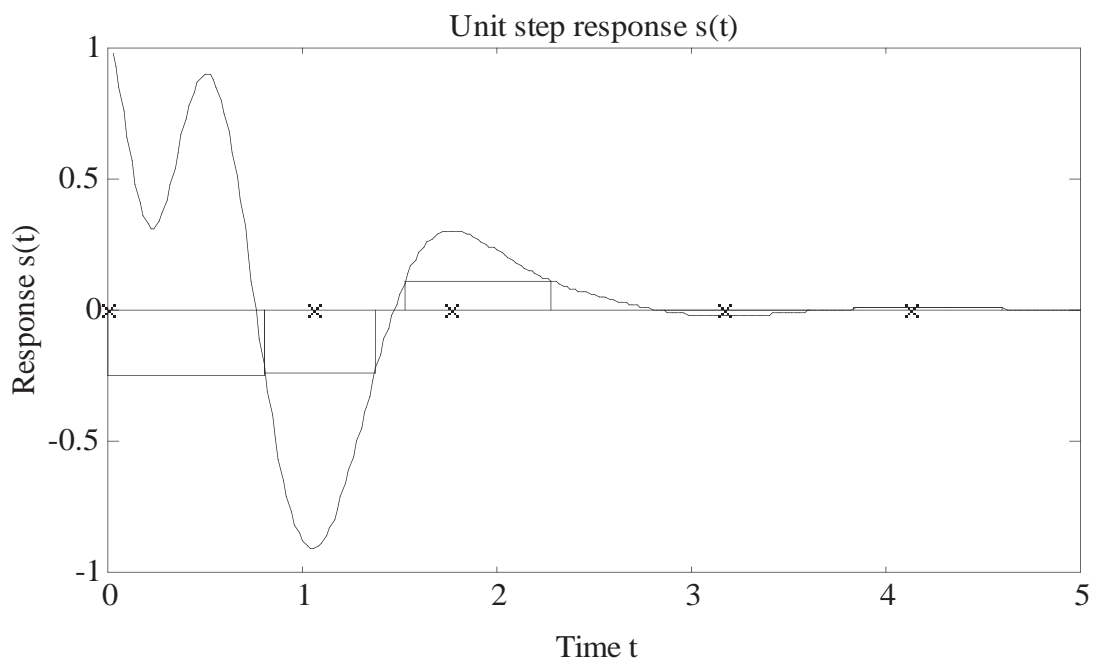


Bild 5 : Gruppe 1 und Balken 2 sind zusammengestoßen (Iterationsschritt 37)

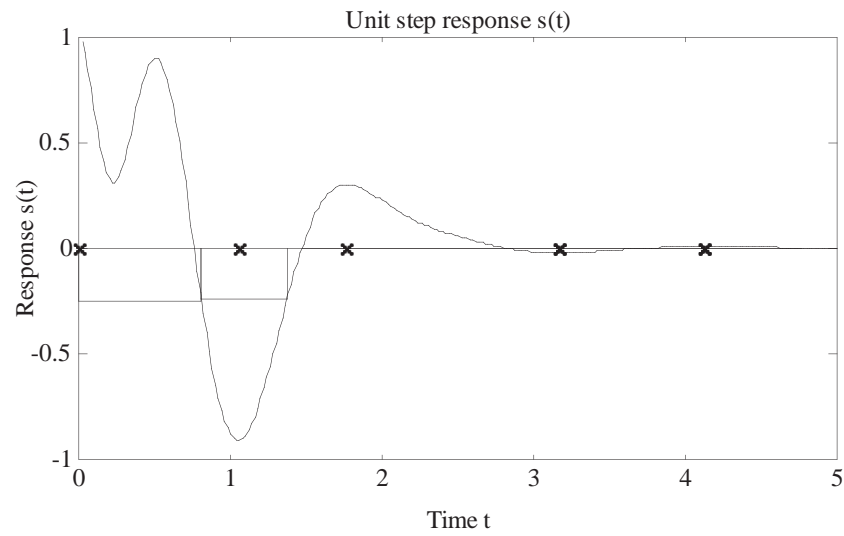
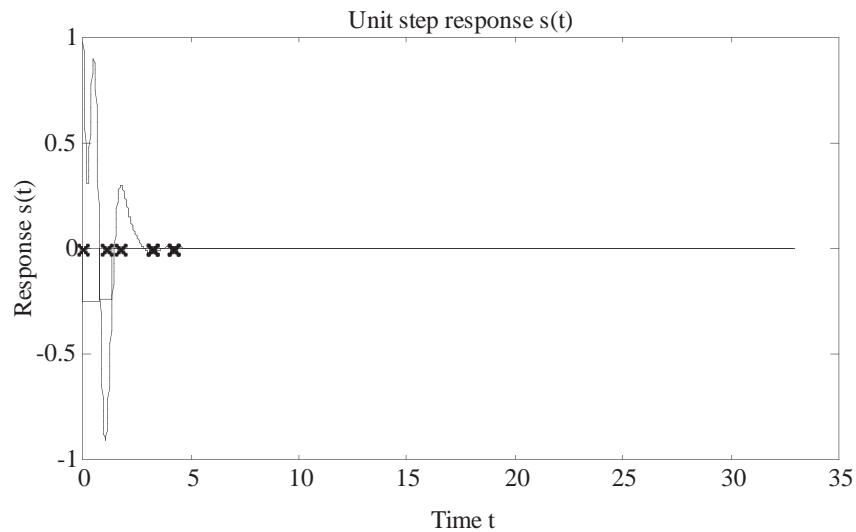


Bild 6 : Ende des Balkenverfahrens



3. Für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{-0.40044s^2 - 1.02511s - 25.62788}{s^4 + 2.6243s^3 + 28.25474s^2 + 26.653s + 25.62788}$$

mit den Beschränkungen

$$\begin{aligned} R &= 0.1 \\ \dot{R} &= 0.0637 \end{aligned}$$

ergibt sich als maximaler Betrag der Ausgangsgröße:

$$y = 0.1272 \quad (0.1283)$$

in einer Rechenzeit von 1.1 Sekunden.

Bild 1 : Initialisierung der Balken

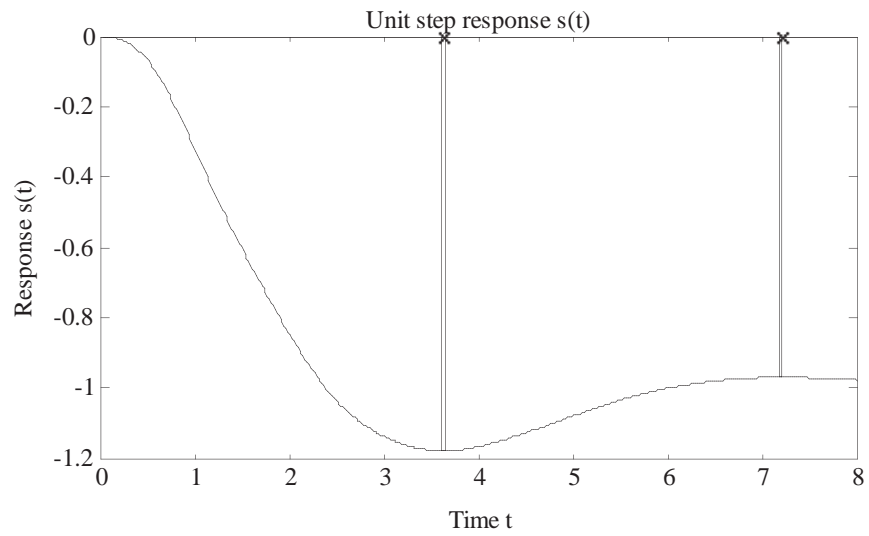
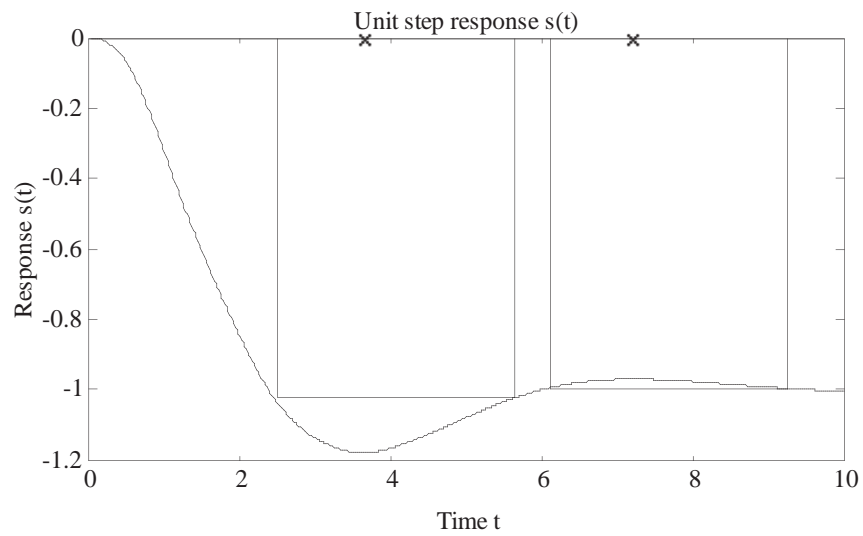


Bild 2 : Ende des Balkenverfahrens



## Diskussion der numerischen Eigenschaften des Programmpaketes

Die Eingaben in die **MATLAB**-Routine sind die Übertragungsfunktion des Systems im Laplacebereich als Zähler- und Nennerpolynom und die Beschränkungen des Eingangs.

Zuerst ist daher die Rücktransformation in den Zeitbereich nötig. Die wesentliche Fehlerquelle hierbei ist die Bestimmung der Nennernullstellen zur Partialbruchzerlegung. Die **MATLAB**-Nullstellen-Routine `roots()` berechnet die Nullstellen eines Polynoms als Eigenwerte der entsprechenden Frobeniusmatrix. Wendet man diese Routine z.B. auf ein Polynom 20. Grades an, so entstehen zum Teil Rechenzeiten von zehn Sekunden und mehr. Bei Nullstellen bis zur Vielfachheit fünf werden die entstehenden relativen Fehler nicht größer als 1%, liegt dagegen eine zehnfache Nullstelle vor, so beträgt der relative Fehler schon 10%.

Mit den so berechneten Nullstellen wird dann in der **MATLAB**-Routine `residue()` die Partialbruchzerlegung durchgeführt. Den Algorithmus dazu kann man in [19] oder [20] nachlesen. Hierbei werden Nullstellen, die sich um weniger als 0.001 unterscheiden, als gleich angesehen.

Bei der inversen Laplacetransformation bereitet das Vorhandensein von mehrfachen konjugiert komplexen Nullstellen Schwierigkeiten. Im allgemeinen jedoch ist der bei der Berechnung dieser Nullstellen auftretende Fehler schon so groß, daß eine mehrfache komplexe Nullstelle vom numerischen Standpunkt aus wie verschiedene einfache komplexe Nullstellen behandelt werden kann.

Liegen Sprungantwort und Gewichtsfunktion im Zeitbereich vor, so müssen im nächsten Schritt die Nullstellen der Gewichtsfunktion berechnet werden. Dieses Problem reduziert sich auf das Finden aller Nullstellen einer glatten Funktion vom Zeitpunkt  $t = 0$  an. Die Genauigkeit, mit der diese Nullstellen errechnet werden, ist eher unwesentlich, da unter die Extrema der Sprungantwort später dann relativ 'breite' Balken gelegt werden. Die **MATLAB**-Routine `fzero()` arbeitet mit invers quadratischer Interpolation (siehe dazu [2]), die den Vorteil von garantierter Konvergenz auch für unstetige Funktionen, und von superlinearer Konvergenzordnung  $p = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$  für einfache Nullstellen glatter Funktionen bietet.

Eine sicherlich lohnenswerte Alternative wäre das Pegasusverfahren mit Konvergenzordnung  $p = 1.696$  und Effizienzindex von 1.642 bei vier Funktionsauswertungen gewesen. Siehe dazu auch [7] und [24].

Bei der Durchführung des eigentlichen Balkenverfahrens ist der Fehler, der durch die sukzessive Verbreiterung entsteht, zu berücksichtigen. Ein gutes Maß hierfür ist der relative Unterschied der Funktionswerte an den beiden Randpunkten des Balkens. Fordert man hier die Genauigkeit von einer Stelle, so ist dieses ein Kompromi aus Rechenzeit und Genauigkeit. In den meisten Fällen ist die Genauigkeit aber größer, falls die Extrema hinreichend 'symmetrisch' sind.

Als Integrator wurde die **MATLAB**-Routine `quad8()` gewählt, die eine adaptiv-rekursive Newton-Cotes Regel benutzt und Genauigkeitsgrad drei hat ([24] und [25]). Im Vergleich zu der auch zur Verfügung stehenden **MATLAB**-Routine `quad()`, eine adaptiv-rekursive Simpson Regel (ebenfalls mit Genauigkeitsgrad drei), kommt `quad8()` besser mit leichten Singularitäten zurecht. Trotzdem bereiten Eigenschaften wie hohe Amplituden bei trigonometrischen Schwingungen oder starke Oszillation von Kurven Schwierigkeiten. Bei den hier zu integrierenden Funktionen treten diese Schwierigkeiten jedoch nicht auf.

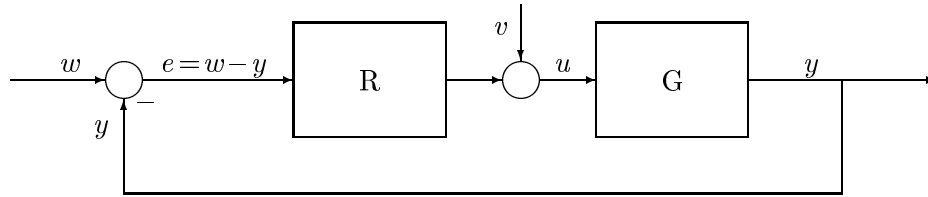


## Teil II

# Entwurf des optimalen Reglers und Modellreduktion



Ziel dieses zweiten Teiles ist es, für eine gegebene Strecke mit gegebenen Beschränkungen einen Regler für den einschleifigen Standardregelkreis zu entwerfen. Der Standardregelkreis hat die folgende Gestalt:



Als Eingangsgröße wird die Führungsgröße  $w$  betrachtet, im allgemeinen Fall kommt noch die Störgröße  $v$  hinzu. Ausgangsgröße sind die Stellgröße  $u$  und die Regeldifferenz  $e$ . Als Übertragungsverhalten ergibt sich dann die folgende Matrixübertragungsfunktion  $H$  in Abhängigkeit von der (gegebenen) Strecke  $G$  und dem (gesuchten) Regler  $R$ :

$$\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = H(G, R) \cdot \begin{pmatrix} W \\ V \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad H(G, R) = \begin{pmatrix} (I + G \cdot R)^{-1} & -(I + G \cdot R)^{-1} \cdot G \\ R \cdot (I + G \cdot R)^{-1} & I - R \cdot (I + G \cdot R)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Der Regler soll nun die folgenden Forderungen erfüllen:

1. Der geschlossene Regelkreis muß asymptotisch stabil sein.
2. Die Amplitude der Stellgröße darf einen vorgegebenen Wert nicht überschreiten:

$$|u(t)| \leq U_{max} \quad \text{für} \quad t \geq 0.$$

3. Das Folgeverhalten des Regelkreises soll möglichst gut sein, d.h. die maximale Amplitude der Regeldifferenz soll minimal sein:

$$|e(t)| \leq E_{max} \rightarrow \min \quad \text{für} \quad t \geq 0.$$

4. Damit die Forderungen (2) und (3) erfüllt werden können, wird für die Führungsgröße

$$|w(t)| \leq W_{max} \quad \text{für} \quad t \geq 0.$$

gefordert. Da in der Praxis neben der Amplitude der Führungsgröße auch die Amplitude ihrer ersten Ableitung nicht beliebig groß werden kann, wird zusätzlich

$$|\dot{w}(t)| \leq \dot{W}_{max} \quad \text{für} \quad t \geq 0.$$

vorausgesetzt. Die Berücksichtigung der zweiten Voraussetzung verhindert, daß der Regler zu konservativ ausfällt.





## Kapitel 4

# Reglerparametrisierung

Das Ziel ist es, die Matrixübertragungsfunktion  $H(G, R)$  in einfacher Weise zu parametrisieren und eine Aussage über die Stabilität von  $H(G, R)$  zu gewinnen.

Zusätzlich dazu soll ein Kriterium für den stabilisierenden Regler entwickelt werden. (Für die folgende Herleitung sei auch auf [12], [13] und [16] verwiesen.)

Zu diesem Zweck zerlegt man die Strecke  $G$  in eine koprime Faktorisierung

$$G = \tilde{N}_G^{-1} \tilde{Z}_G = Z_G N_G^{-1}, \quad (4.1)$$

ebenso verfährt man mit dem Regler  $R$

$$R = \tilde{Z}_R \tilde{N}_R^{-1}.$$

Setzt man diese Faktorisierung in die Übertragungsfunktion  $H(G, R)$  ein, so erhält man

$$H(G, R) = \begin{pmatrix} \tilde{N}_R(\tilde{N}_G \tilde{N}_R + \tilde{Z}_G \tilde{Z}_R)^{-1} \tilde{N}_G & -\tilde{N}_R(\tilde{N}_G \tilde{N}_R + \tilde{Z}_G \tilde{Z}_R)^{-1} \tilde{Z}_G \\ \tilde{Z}_R(\tilde{N}_G \tilde{N}_R + \tilde{Z}_G \tilde{Z}_R)^{-1} \tilde{N}_G & I - \tilde{Z}_R(\tilde{N}_G \tilde{N}_R + \tilde{Z}_G \tilde{Z}_R)^{-1} \tilde{Z}_G \end{pmatrix},$$

was sich noch vereinfachen läßt zu:

$$H(G, R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{N}_R \\ \tilde{Z}_R \end{pmatrix} (\tilde{N}_G \tilde{N}_R + \tilde{Z}_G \tilde{Z}_R)^{-1} (\tilde{N}_G \quad - \tilde{Z}_G).$$

Die letztere Gleichung heißt auch bikoprime Faktorisierung von  $H(G, R)$ , da die Matrizen  $\begin{pmatrix} \tilde{N}_R \\ \tilde{Z}_R \end{pmatrix}$  und  $\Delta := \tilde{N}_G \tilde{N}_R + \tilde{Z}_G \tilde{Z}_R$  rechtskoprime und die Matrizen  $\Delta$  und  $(\tilde{N}_G \quad - \tilde{Z}_G)$  linkskoprime sind. Aus der Koprimheit und weiteren Überlegungen folgt dann (siehe [13] und [26]), daß ein Regler  $R$  die Strecke  $G$  genau dann stabilisiert, wenn er eine Faktorisierung der Form

$$R = (\tilde{Z}_R \Delta^{-1}) (\tilde{N}_R \Delta^{-1})^{-1} =: Z_R N_R^{-1}$$

besitzt, die die sogenannte *Bezout-Gleichung*

$$\tilde{N}_G N_R + \tilde{Z}_G Z_R = I \quad (4.2)$$

erfüllt. Die Erfüllung der Bezout-Gleichung ist notwendige und hinreichende Bedingung für die Stabilisierung der Strecke durch den Regler.

Es gilt noch mehr: Fixiert man eine Lösung  $(Z_R, N_R)$  der Bezout-Gleichung, so folgt für jede stabile Matrix  $Q$ , daß der Regler

$$R = (Z_R + N_G Q)(N_R - Z_G Q)^{-1} \quad (4.3)$$

die Strecke  $G$  stabilisiert.

Umgekehrt kann man zeigen, daß jeder Regler, der die Strecke  $G$  stabilisiert, durch geeignete Wahl von  $Q$  in der Form 4.3 darstellbar ist.

Daher kann man jetzt jede Matrixübertragungsfunktion des geschlossenen Kreises darstellen als:

$$H(G, R) = \begin{pmatrix} (N_R - Z_G Q)\bar{N}_G & -(N_R - Z_G Q)\bar{Z}_G \\ (Z_R + N_G Q)\bar{N}_G & I - (Z_R + N_G Q)\bar{Z}_G \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

D.h. durch die Parametrisierung gewinnt man die Matrixübertragungsfunktion als affine Funktion des Parameters  $Q$  wieder. Für alle stabilen Parameter  $Q$  ist die Übertragungsfunktion dann selbst wieder stabil.

Der Vorteil in dieser Beschreibung liegt darin, daß der geschlossene Kreis durch alleinige Variation des Parameters  $Q$  solange variiert werden kann, bis er die gewünschten Eigenschaften besitzt. Bei der Variation ist die Stabilität gewährleistet, falls man nur stabile Parameter  $Q$  zuläßt. Hat man den Regelkreis mit den gewünschten Eigenschaften gefunden, so erhält man den Regler dann einfach aus Gleichung 4.1.

Zusammenfassend liegt also bis jetzt die folgende Situation vor:

Aus der koprime Darstellung der (bekannten) Strecke 4.1 kann man durch Lösen der Bezout-Gleichung 4.2 einen Regler 4.3 und die Übertragungsfunktion 4.4 gewinnen. Dabei ist an den Parameter  $Q$  nur vorausgesetzt, daß er stabil ist. Durch Variation des Parameters  $Q$  kann man nun der Strecke das gewünschte Verhalten aufzwingen. Erfüllt die Strecke dann die Forderungen bezüglich Regledifferenz und Stellgrößenbeschränkung, so kann man den Regler mittels Auswerten von 4.3 wiedergewinnen.

Zwingend notwendig ist also noch die Berechnung der koprime Faktoren der Strecke. Dies kann wie folgt im Zustandsraum geschehen:

Für die Strecke  $G$  sei eine Minimalrealisierung vorausgesetzt, d.h. es liegt ein steuer- und beobachtbares Modell vor:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

mit der Übertragungsfunktion:

$$G = G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Für dieses mathematische Modell wird ein Zustandsreglerentwurf mittels  $u = Kx$  und ein Beobachterentwurf mittels  $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(C\hat{x} + Du - y)$  durchgeführt, so daß die beiden Matrizen  $A_K := A + BK$  und  $A_H := A + HC$  Hurwitzmatrizen sind. Um eine rechtskopprime Zerlegung der Strecke zu gewinnen, setzt man  $\theta = u - Kx$  und erhält als neue Zustandsbeschreibung:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_K x + B\theta \\ y &= (C + DK)x + D\theta. \end{aligned}$$

Im Frequenzbereich folgt damit für die letzte Gleichung:

$$Y = \{(C + DK)(sI - A_K)^{-1}B + D\}\Theta$$

und aus der Beziehung  $\theta = u - Kx$  folgt dann:

$$U = \{K(sI - A_K)^{-1}B + I\}\Theta$$

Setzt man nun noch  $Z_G = (C + DK)(sI - A_K)^{-1}B + D$  und  $N_G = K(sI - A_K)^{-1}B + I$ , so hat man zwei stabile Matrizen, da ja die Matrix  $A_K$  nach Konstruktion eine Hurwitzmatrix ist, und durch Nachrechnen kann man leicht zeigen, daß die Darstellung der Strecke als

$$G = Z_G N_G^{-1}$$

rechtskoprim ist.

Um eine linkskopprime Darstellung der Strecke zu bekommen, führt man analoge Überlegungen für die Matixübertragungsfunktion  $G^T$  durch und erhält:

$$G^T = \{(B^T + D^T H^T)(sI - A_H^T)^{-1}C^T + D^T\}\{H^T(sI - A_H^T)^{-1}C^T + I\}^{-1} =: \bar{Z}_G^T \bar{N}_G^{-T}.$$

Die rechts- und linkskopprime Zerlegung erhält man nun aus dem Entwurf eines Zustandsreglers  $u = K\hat{x}$ , der auf den oben beobachteten Zustand zurückgreift. Aus dem mathematischen Modell des Reglers erhält man dann die rechtskopprime Zerlegung

$$R = \{K(sI - A_K)^{-1}H\}\{I - (C + DK)(sI - A_K)^{-1}H\}^{-1} =: Z_R N_R^{-1},$$

und mit ähnlichen Überlegungen für das transponierte Modell erhält man die linkskopprime Zerlegung

$$R^T = \{H^T(sI - A_H^T)^{-1}K^T\}\{I - (B^T + D^T H^T)(sI - A_H^T)^{-1}K^T\}^{-1} =: \bar{Z}_R^T \bar{N}_R^{-T}.$$

Insgesamt liegt jetzt eine (der möglichen) kopprime Faktorisierung vor: Die Strecke läßt sich darstellen als:

$$\begin{aligned} Z_G(s) &= (C + DK)(sI - A_K)^{-1}B + D \\ N_G(s) &= K(sI - A_K)^{-1}B + I \\ \bar{Z}_G(s) &= C(sI - A_H)^{-1}(B + HD) + D \\ \bar{N}_G(s) &= C(sI - A_H)^{-1}H + I \end{aligned}$$

und die daraus resultierende Darstellung für den stabilisierenden Regler lautet:

$$\begin{aligned} Z_R(s) &= K(sI - A_K)^{-1}H \\ N_R(s) &= -(C + DK)(sI - A_K)^{-1}H + I \\ \bar{Z}_R(s) &= K(sI - A_H)^{-1}H \\ \bar{N}_R(s) &= K(sI - A_H)^{-1}(B + HD) + I \end{aligned}$$

Damit sind die notwendigen Voraussetzungen geschaffen, um die koprimen Zerlegungen direkt aus dem Zustandsraum heraus zu berechnen.



# Kapitel 5

## Formulierung des Optimierungsproblems

Bislang besteht die Suche nach dem optimalen Regler aus dem folgenden Problem:

Minimiere die maximale Amplitude der Regeldifferenz in Abhängigkeit des (stabilen) Parameters  $Q$ , so daß die maximale Amplitude der Stellgröße einen vorgegebenen Wert nicht überschreitet.

Es handelt sich also hierbei um ein *infinite Optimierungsproblem*, da der Raum aller zugelassenen Parameter  $Q$  unendlichdimensional ist. Zudem ist es noch mit einer Nebenbedingung beschränkt. Ziel dieses Kapitels ist eine Umformulierung des obigen Optimierungsproblems in ein unbeschränktes Optimierungsproblem. Zudem soll die Menge der zulässigen Parameter auf eine finite ("kleinere") Menge beschränkt werden.

Um die Nebenbedingung zu eliminieren, bildet man eine konvexe Kombination der beiden maximalen Amplituden,

$$J_\alpha(Q) := \alpha \max J_E(Q) + (1 - \alpha) \max J_U(Q) \quad \text{für } \alpha \in [0; 1]$$

und minimiert dann die folgende Familie von konvexen Optimierungsproblemen:

$$J_\alpha(Q) \rightarrow \min \quad \forall \alpha \in [0; 1].$$

Zu jedem  $\alpha \in [0; 1]$  existiert also ein optimaler Parameter  $Q^*$ , der folgende wichtige Eigenschaften besitzt:

1. Ist  $Q^*$  die optimale Lösung, so gibt es kein stabiles  $Q$ , das eines der beiden Ungleichungssysteme

$$\max J_U(Q) < \max J_U(Q^*) \quad \text{und} \quad \max J_E(Q) \leq \max J_E(Q^*) \quad (5.1)$$

$$\max J_U(Q) \leq \max J_U(Q^*) \quad \text{und} \quad \max J_E(Q) < \max J_E(Q^*) \quad (5.2)$$

erfüllt.

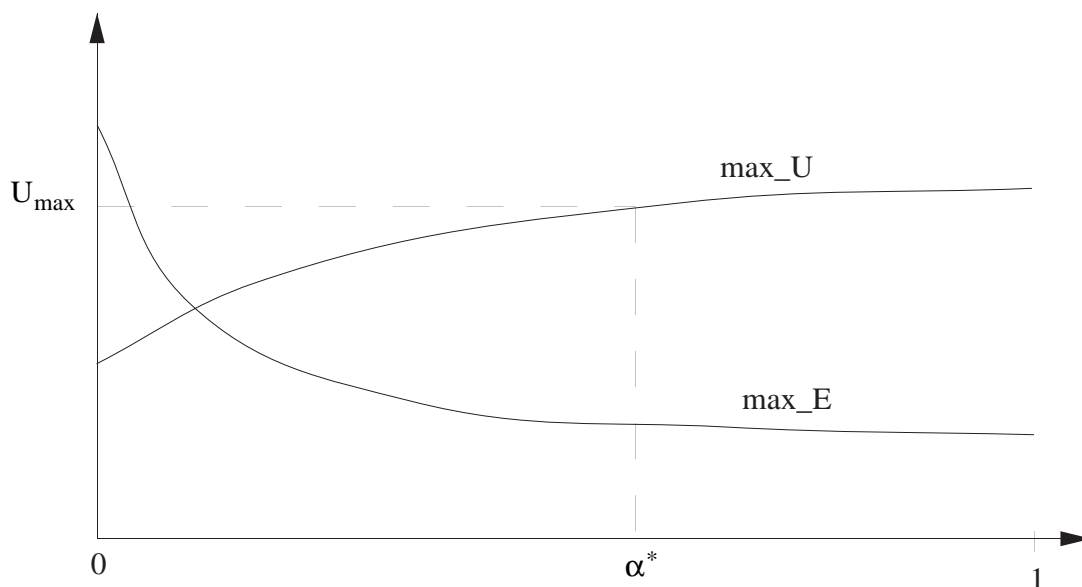
2.  $J_\alpha(Q)$  ist stetig in  $\alpha \in [0; 1]$ .
3.  $\max J_E$  ist eine monoton fallende und  $\max J_U$  ist eine monoton wachsende Funktion des Parameters  $\alpha \in [0; 1]$ .

4.  $\max_{\alpha} \underline{E}$  ist unstetig an einer Stelle  $\alpha = \alpha^*$ , genau dann wenn  $\max_{\alpha} \underline{U}$  unstetig an der Stelle  $\alpha = \alpha^*$  ist.
5. In einer Sprungstelle der beiden Funktionale  $\max_{\alpha} \underline{E}$  und  $\max_{\alpha} \underline{U}$  existieren unendlich viele Lösungen des Optimierungsproblems.

Wegen des Verlaufes der beiden Funktionale  $\max_{\alpha} \underline{E}$  und  $\max_{\alpha} \underline{U}$  kann man nun noch folgende **Definition** treffen:

Die Reglersynthese heißt lösbar, falls ein  $\alpha \in [0; 1]$  existiert, so daß  $\max_{\alpha} \underline{U}(Q^{\alpha}) = U_{max}$  ist.

Das nachfolgende Bild zeigt einen typischen Verlauf der beiden Kurven bei einer lösbaren Reglersynthese:



Das ursprüngliche Optimierungsproblem wurde also auf die folgende Form gebracht:

- A. Löse die Optimierungsprobleme

$$, \alpha(Q) \rightarrow \min \quad \forall \alpha \in [0; 1].$$

- B. Bestimme  $\alpha \in [0; 1]$  mit  $\max_{\alpha} \underline{U}(Q^{\alpha}) = U_{max}$ .

- C. Setze  $Q = Q^{\alpha}$  und bestimme den optimalen Regler mittels

$$R = (Z_R + N_G Q)(N_R - Z_G Q)^{-1}.$$

Einziges Problem ist jetzt nur noch die Dimension des Optimierungsproblems zur Lösung von Teil A.

Der Optimierungsparameter  $Q$  ist als Funktion von  $s$  in der ganzen komplexen Ebene definiert und hat aufgrund der Stabilität nur Pole mit negativem Realteil.

Mit der Abbildung  $z := \frac{s-p}{s+p}$ , für ein  $p > 0$ , bildet man nun die abgeschlossene rechte Halbebene in die Einheitskreisscheibe ab.

Die so erhaltene Funktion  $Q = Q(z)$  ist dann analytisch auf der Einheitskreisscheibe und die Reihenentwicklung

$$Q(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} X_{\nu} z^{\nu-1}$$

konvergiert deshalb gleichmäßig auf der Einheitskreisscheibe (siehe auch [23]). Daher kann man die Funktion  $Q(s)$  durch eine endliche Summe der Form

$$Q(s) \approx \hat{Q}_N(s) = \sum_{\nu=1}^N X_{\nu} \frac{s - p^{\nu-1}}{s + p}$$

beliebig gut approximieren.

Weitere Überlegungen zeigen, daß auch die beiden Funktionale  $\max \underline{E}$  und  $\max \underline{U}$  stetig sind, d.h.:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \max \underline{U}(\hat{Q}_N(s)) &= \max \underline{U}(Q(s)) \\ &\text{und} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \max \underline{E}(\hat{Q}_N(s)) &= \max \underline{E}(Q(s)). \end{aligned}$$

Man kann also die maximalen Amplituden der Regeldifferenz und Stellgröße ebenfalls mit dem approximierten Parameter (angenähert) errechnen (siehe auch [13]).

Mit den Näherungswerten, die das finite Optimierungsproblem liefert, verfährt man dann weiter wie oben beschrieben.

Damit ist das infinite und beschränkte Optimierungsproblem durch ein finites und unbeschränktes Optimierungsproblem approximiert worden.





# Kapitel 6

## Ordnungsreduktion des Reglers

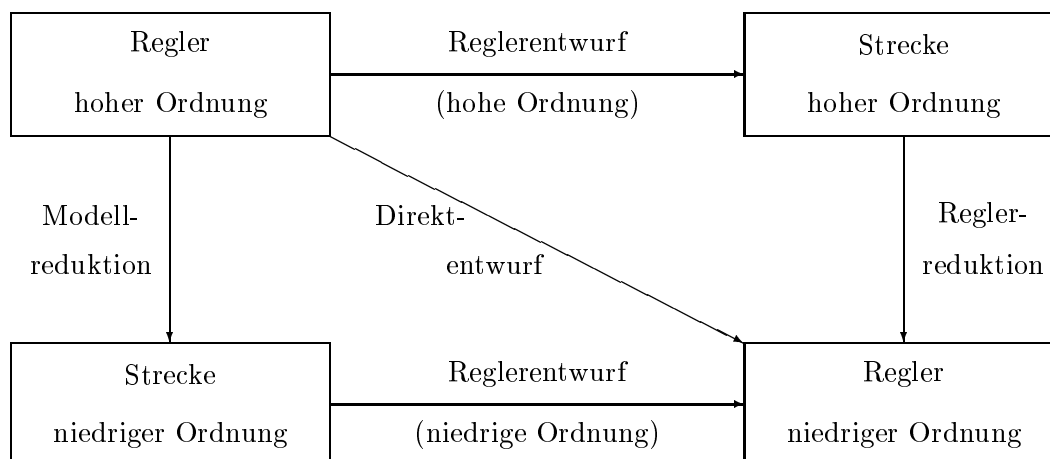
Ziel dieses Kapitels ist es, einen Überblick über die angewandte Methode der Modellreduktion zu gewinnen.

Die Gründe, ein bereits vorhandenes Modell (hier den Regler) bezüglich der Ordnung zu reduzieren, sind die folgenden:

1. Bei einigen modernen Entwurfsverfahren wie dem hier gewählten Parametrisierungsansatz (oder zum Beispiel auch dem LQG-Entwurf) kann man die Ordnung des resultierenden Reglers a priori nicht beschränken. Ein solches Entwurfsverfahren produziert also möglicherweise einen Regler, der eine **höhere Ordnung** besitzt als **“nötig“**. Diesen Regler gilt es dann unter Konservierung seiner Eigenschaften in der Ordnung zu reduzieren.
2. Einige Reglerentwurfsverfahren erzeugen fiktive **nicht-beobachtbare** bzw. **nicht-steuerbare Zustände**, die vor der Implementation des Reglers entfernt werden müssen.
3. Da ein spezieller Regler immer zu einer speziellen Strecke entworfen wird, sollte die Ordnung des Reglers in etwa **der Ordnung der Strecke angepaßt** sein.
4. Generell läßt sich ein System niedrigerer Ordnung nicht nur leichter auf seine Korrektheit überprüfen, sondern führt auch zu einem **besseren Modellverständnis** – unter Umständen sind einige Parameter dann wieder physikalisch interpretierbar.
5. Eine Strecke niedriger Ordnung wirft weitaus **weniger Probleme numerischer Art** auf als eine Strecke hoher Ordnung.

Reduziert man jedoch einen (optimalen) Regler in seiner Ordnung, so muß man sich darüber im klaren sein, daß man damit immer ein Stück von der Optimalität des Reglers abweicht.

Prinzipiell gibt es **drei verschiedene Wege**, für eine Strecke hoher Ordnung einen Regler niedriger Ordnung zu bekommen (vergleiche Skizze):



Der sicherlich beste Wege ist der Direktentwurf, d.h. für die Strecke wird direkt ein Regler niedriger Ordnung entworfen, die Reduktion ist dann überflüssig. Dieser Weg ist jedoch nicht immer praktikabel, da beispielsweise ein LQG-Entwurf einen Regler produziert, der i.a. in etwa die Ordnung der Strecke aufweist oder eine höhere.

Ein anderer Weg wäre, erst die Strecke zu reduzieren, und für die reduzierte Strecke einen Regler von etwa gleicher Ordnung zu entwerfen. Dieser Regler regelt zwar die reduzierte Strecke optimal, da er jedoch die Originalstrecke höherer Ordnung regeln soll, ist er unter Umständen nicht in der Lage, den Fehler, der bei der Reduktion gemacht wurde, zu berücksichtigen.

Schließlich kann man für die Originalstrecke einen Regler von entsprechend hoher Ordnung entwerfen und dann den Regler reduzieren.

Bei der Reduktion des Reglers existieren wiederum zwei prinzipielle Wege. Zum einen kann man den Regler in Einheit mit der Strecke behandeln und ihn so reduzieren, daß die Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises erhalten bleiben, oder man behandelt den Regler isoliert als Modell für sich und reduziert ihn dann unter Beibehaltung seiner Eigenschaften. Bei der letzteren Methode besteht die Möglichkeit, daß der mit dem reduzierten Regler geschlossene Regelkreis seine gewünschten und vorher vorhandenen Eigenschaften teilweise oder ganz verliert, diese sollten also auf jeden Fall nach der Reduktion nochmals überprüft werden.

Hier wurde der letzte Weg, also Reglerentwurf hoher Ordnung – Modellreduktion des Reglers – Überprüfung der Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises, gewählt und die hier zugrundeliegenden Ideen der Modellreduktion sollten nun kurz dargestellt werden.

Die Modellreduktion basiert letztlich darauf, die vorhandene Übertragungsfunktion (hoher Ordnung) durch eine andere Übertragungsfunktion (niedrigerer Ordnung) bezüglich eines geeignet erscheinenden Fehlermaßes zu approximieren.

Im folgenden soll eine gegebene Übertragungsfunktion  $G(s)$  durch eine Übertragungsfunktion niedrigerer Ordnung  $\hat{G}(s)$  approximiert werden. Nimmt man den Fehler, der dadurch entsteht, als  $E(s) := G(s) - \hat{G}(s)$  an, so kann man das Ein/Ausgangsverhalten mittels der Faltung

$$y(t) = \lim_{T \rightarrow -\infty} \int_T^t e(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

beschreiben. Bezeichnet man mit  $\{\sigma_i(A)\}_{i \in I}$  die Folge der Singulärwerte des Operators – bei geeigneter Indexmenge  $I$ , so kann man die folgenden kanonischen Normen definieren<sup>1</sup>:

<sup>1</sup>Für die funktionalanalytischen Grundlagen sei auf [18] und [22] verwiesen.

- Die Supremumsnorm:

$$\begin{aligned}\|E\|_\infty &:= \sup_\omega \{\sigma_{\max}(E(i\omega))\} \\ &= \sup\{\|E(i\omega)U(i\omega)\|_2; \|U(i\omega)\|_2 = 1\}\end{aligned}$$

- Die Einsnorm:

$$\begin{aligned}\|e\|_1 &:= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \sigma_{\max}(e(t)) dt \\ &= \sup\{\|e * u\|_\infty; \|u(t)\|_\infty \leq 1\}\end{aligned}$$

- Die Zweinorm:

$$\begin{aligned}\|e\|_2 &:= \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \text{tr}(\bar{e}(t)e(t)) dt \right)^{1/2} \\ &= \|E(i\omega)\|_2 \\ &= \sup\{\|e * u\|_\infty; \|u(t)\|_2 \leq 1\}\end{aligned}$$

Diese Normen beschreiben den Fehler bezüglich eines beschränkten Einganges. So ist bei der Supremumsnorm der Eingang im Frequenzbereich beschränkt und bei den anderen Normen ist der Eingang im Zeitbereich beschränkt.

Um sich von dieser Beschränkung zu lösen, betrachtet man den sogenannten *Hankeloperator*. Er bietet mit den für ihn kanonischen Normen die Möglichkeit, die oben definierten Normen abzuschätzen. Der Hankeloperator ist im wesentlichen eine Einschränkung des Faltungsoperators auf  $L^2(-\infty, 0)$ :

$$(\cdot, {}_E u)(t) := \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e(t + \tau)u(\tau) d\tau.$$

Die Definition des Hankeloperators bietet – wie erwähnt – die Möglichkeit, noch einige Normen zusätzlich zu den obigen zu definieren. Diese “neuen“ Normen werden dann untere und obere Schranken für die schon vorhandenen Normen bilden.

Es sei als bekannt vorausgesetzt, daß  $\cdot, {}_E$  ein Hankeloperator ist, d.h. für die entsprechende Folge der Singulärwerte gilt  $\{\sigma_i(\cdot, {}_E)\}_{i \in I} \in \ell^\infty$ . Da man die Folgenräume  $\ell^\infty$  kanonisch ineinander einbetten kann:  $\ell^p \rightarrow \ell^q$  für  $p \geq q$ , kann man die entsprechenden Normen aller Schatten- $p$ -Klassen definieren:

- Die nukleare Norm:

$$\nu_1(E) := \sum_{i \in I} \sigma_i(\cdot, {}_E),$$

- Die Hilbert-Schmidt-Norm:

$$\nu_2(E) := \sum_{i \in I} \sigma_i^2(\cdot, {}_E).$$

Ebenso kann man als Grenzfall für  $p \rightarrow \infty$  definieren:

- Die Hankel-Norm:

$$\nu_\infty(E) := \sigma_{\max}(\cdot, {}_E).$$

Wie man zeigen kann [18], sind die so definierten Funktionale tatsächlich Normen auf den entsprechenden Räumen.

Für die so definierten Normen gelten neben den bekannten Ungleichungen für die  $p$ -Normen noch folgende Ungleichungen in Verbindung mit den Schatten- $p$ -Normen [11]:

$$\begin{aligned} 2\nu_1(E) &\geq \|e\|_1 \geq \|E\|_\infty \\ \|E + F\|_\infty &\geq \nu_\infty(E) \quad \text{für jedes antikausale } F \end{aligned}$$

Für die letzte Ungleichung kann man auch ein  $F$  konstruieren, so daß die Gleichheit gilt.

Insgesamt läßt sich daraus ersehen, daß die Singulärwerte des Hankeloperators akzeptable untere und obere Schranken für andere Normen erzeugen. Ziel wird es also sein, den Hankeloperator für die vorhandene Übertragungsfunktion,  $G$  durch einen anderen Hankeloperator,  $\hat{G}$  zu approximieren. Beschränkt man die Ordnung des Approximationsoperators, so wirkt sich dieses auf die Singulärwerte prinzipiell immer auf die folgende Art und Weise aus:

Ist  $A$  linearer und kompakter Operator mit einem Rang, der kleiner oder gleich einer natürlichen Zahl  $m$  ist, so bricht die Folge der Singulärwerte von  $A$  ab dem  $m$ -ten Glied ab.

Da alle Übertragungsfunktionen, die hier betrachtet werden, einen endlichen Rang besitzen, stellt sich also die Frage der Konvergenz der Reihen bei der Definition der Normen nicht.

Die eigentliche **Prozedur der Reduktion** soll nun kurz umrissen werden:

Vorgegeben sei eine stabile Übertragungsfunktion  $G(s)$  vom McMillan-Grad<sup>2</sup>  $n$ , die analytisch auf der imaginären Achse ist und im Unendlichen verschwindet. Ferner liege für diese Übertragungsfunktion eine Realisierung der Form  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$  vor, wobei das Spektrum von  $A$  in der linken offenen Halbebene liegen soll. Ziel ist nun die Approximation von  $G$  durch eine stabile Funktion  $K$ , die einen McMillan-Grad  $j < n$  hat.

Zur Vereinfachung seien noch zwei Abkürzungen eingeführt:

$H :=$  Klasse der Übertragungsfunktionen, die in der linken offenen Halbebene analytisch und gleichmäßig beschränkt sind.

Für ein natürliche Zahl  $j$  sei definiert:

$H(j) :=$  Klasse der Übertragungsfunktionen der Form  $G + F$ , wobei  $G$  den McMillan-Grad  $j$  hat und  $F \in H$  ist.

Alle Räume seien mit ihren kanonischen Normen versehen.

Die Approximation soll also mit einer Übertragungsfunktion aus  $H(j)$  geschehen. Man kann zeigen, daß die folgende, für das Problem grundlegende Gleichung gilt:

$$\inf\{\|G - K\|_\infty; K \in H(j)\} = \sigma_{j+1}(G),$$

wobei  $\sigma_{j+1}(G)$  der  $(j + 1)$ te Singulärwert von  $G$  ist<sup>3</sup>.

Ausgehend von dieser Gleichung kann man nun  $\sigma$  und  $j$  so auswählen, daß gerade die Gleichung

$$\sigma_j(G) > \sigma \geq \sigma_{j+1}(G)$$

erfüllt ist, beziehungsweise im Falle  $j = 0$ :

$$\sigma \geq \sigma_1(G).$$

<sup>2</sup>Zur Definition dieses Begriffes schaue man in [11] und die dort angegebene Literatur.

<sup>3</sup>Die Singulärwerte seien dazu in kanonischer Weise zu  $\sigma_1(G) > \sigma_2(G) > \dots > \sigma_n(G) > 0$  geordnet.

Prinzipiell ist also bei gewünschtem und damit vorgegebenen Grad  $j$  der Wert für  $\sigma$  geeignet zu wählen. Dieser Wert für  $\sigma$  ist dann ein Maß für die Güte der Approximation.

Hat man diese Wahl getroffen, so kann man alle in Frage kommenden Übertragungsfunktionen  $K$ , also alle, die

$$\|G - K\|_{\infty} \leq \sigma \quad \text{und} \quad K \in H(j)$$

erfüllen, mittels einer gebrochenrationalen Funktion parametrisieren [11]. Die Koeffizienten für diese Parametrisierung kann man dann direkt aus der Realisierung der Übertragungsfunktion ermitteln. Ferner kann man noch ein Theorem formulieren, welches eine Aussage über die Existenz dieser Approximation macht. Für ausführlichere Darstellungen sei auf [11] und die dort angegebene Literatur verwiesen.

Insgesamt gelingt es so eine stabile Übertragungsfunktion in der Ordnung zu reduzieren.

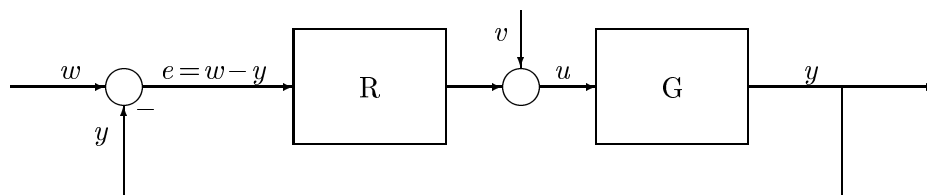
Jedoch sind auch Übertragungsfunktionen mit instabilen Polen prinzipiell in der Ordnung reduzierbar. Dazu wird der Nenner in einen stabilen und einen instabilen Teil aufspalten. Um die Eigenschaften des Reglers prinzipiell beibehalten zu können wird nur der stabile Teil reduziert, und zwar soweit, bis die gewünschte Ordnung erreicht ist.



## Kapitel 7

# Beispiele zum Entwurf des Reglers

Den beiden Beispielen in diesem Kapitel liegt der folgende einschleifige Standardregelkreis zugrunde:



Dabei bezeichnet  $w$  die Führungsgröße,  $e$  die Regeldifferenz,  $v$  die Störgröße (hier unberücksichtigt),  $u$  die Stellgröße und  $y$  den Streckenausgang.

Der **Regler**  $R$  soll nun die **folgenden Forderungen** erfüllen (vergleiche dazu auch die Einführung zu Teil II):

1. Der geschlossene Regelkreis muß asymptotisch stabil sein.
2. Die Amplitude der Stellgröße darf einen vorgegebenen Wert nicht überschreiten:

$$|u(t)| \leq U_{max} \quad \text{für } t \geq 0.$$

(Für das Entwurfsverfahren selbst braucht der Wert  $U_{max}$  nicht festgelegt zu werden. Ganz im Gegenteil wird durch das Entwurfsverfahren selbst der Bereich derjenigen Stellgrößenbeschränkungen geliefert, für den die Reglersynthese lösbar ist; vergleiche dazu auch das 5. Kapitel).

3. Das Folgeverhalten des Regelkreises soll möglichst gut sein, d.h. die maximale Amplitude der Regeldifferenz soll minimal sein:

$$|e(t)| \leq E_{max} \rightarrow \min \quad \text{für } t \geq 0.$$

4. Damit die Forderungen (2) und (3) erfüllt werden können, wird für die Führungsgröße

$$|w(t)| \leq W_{max} \quad \text{für } t \geq 0.$$

gefordert. Da in der Praxis neben der Amplitude der Führungsgröße auch die Amplitude ihrer ersten Ableitung nicht beliebig groß werden kann, wird zusätzlich

$$|\dot{w}(t)| \leq \dot{W}_{max} \quad \text{für } t \geq 0.$$

vorausgesetzt.



**1. Beispiel:**

In Anlehnung an [13] soll die Strecke  $G(s) = \frac{s-1}{s(s-2)}$ , eine nicht-minimalphasige und instabile Strecke, geregelt werden.

Für die Regelung zugrundegelegt wird der einschleifige Standardregelkreis mit Regelstrecke  $G(s)$  wie oben angegeben und dem gesuchten Regler  $R(s)$ .

Die Störgröße  $v(t)$  soll den Wert Null haben und die Führungsgröße  $w(t)$  soll den folgenden Beschränkungen unterliegen:

$$|w(t)| \leq 1 \quad \text{und} \quad |\dot{w}(t)| \leq 0.8$$

Wie bereits erwähnt, braucht der Wert für  $U_{\max}$  noch nicht festgelegt zu werden.

Wie man zeigen kann, ist jeder Regler, der diese Strecke stabilisiert, instabil und besitzt mindestens die Ordnung Eins [26].

Der Regler soll nun, wie im 4. und 5. Kapitel vorgestellt, zuerst faktorisiert und dann parametrisiert werden.

Im 4. Kapitel wurde dafür eine Möglichkeit geschaffen, die **koprime Faktoren** direkt aus dem Zustandsraum heraus zu berechnen. Offensichtlich hängen diese Darstellungen nicht nur vom mathematischen Modell der Strecke  $(A, B, C, D)$ , welches hier in Minimalrealisierung vorliegt, ab, sondern auch vom zu entwerfenden Zustandsregler  $K$  und Beobachter  $H$ . Es sind also in der Tat noch einige Freiheitsgrade in der Berechnung der koprime Faktoren offen.

Der **Zustandsregler**  $\mathbf{K}$  wurde so entworfen, daß das Regelgesetz  $u = -Kx$  das Integral

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \begin{pmatrix} x^T & u^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & N \\ N^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} dt$$

minimiert.

Die Freiheitsgrade im Entwurf liegen also in der Wahl der Gewichtungsmatrizen  $S$ ,  $N$  und  $R$ . Diese Matrizen gewichten die Anteile der Zustände  $x$  und der Stellgröße  $u$  unterschiedlich. Um die Übersichtlichkeit zu erhöhen, sollte man nach Möglichkeit die Matrizen  $S$  und  $R$  als Diagonalmatrizen oder sogar als Vielfache der Einheitsmatrix und die Matrix  $N$  als Nullmatrix wählen.

In diesem Fall ist  $S$  eine  $2 \times 2$  Matrix,  $N$  ein  $2 \times 1$  Spaltenvektor und  $R$  ein Skalar. Die Problematik, die die Wahl dieser Matrizen aufwerfen kann, läßt sich am zweiten Beispiel besser dokumentieren. Deshalb sei hier nur vermerkt, daß sich die Wahl der Gewichtungsmatrizen wesentlich auf den Entwurf auswirken und daß die Matrizen hier wie folgt gewählt wurden:

$$\begin{aligned} S &= C^T C, \quad C \text{ aus dem mathematischen Modell der Strecke,} \\ N &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ R &= 0.001 \cdot I_1. \end{aligned}$$

Der **Beobachter**  $H$  wurde als stationäres Kalmanfilter, dessen duales Problem das quadratische Gütekriterium

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \begin{pmatrix} x^T & u^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & N \\ N^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} dt \rightarrow \min$$

darstellt, entworfen. Für die prinzipielle Wahl der Gewichtungsmatrizen gelten dieselben Aussagen wie oben. In diesem Beispiel wurden sie zu

$$\begin{aligned} S &= 0.001 \cdot I_2, \\ N &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ R &= I_1. \end{aligned}$$

gewählt.

Mit der Wahl der Gewichtungsmatrizen für den Zustandsregler- und Beobachterentwurf hat man also eine koprime Faktorisierung der Strecke  $G(s) = \bar{Z}_G(s)\bar{N}_G^{-1}$  gewonnen. Ebenso kann man dann die koprime Faktorisierung des Nominalreglers gewinnen. Man benutzt dazu am besten die im 4. Kapitel vorgestellte Berechnung im Zustandsraum und erhält einen Regler in der Form  $R = Z_R N_R^{-1}$ . Wie ebenfalls im 4. Kapitel gezeigt stabilisiert dann jeder Regler der Form  $R = (Z_R + N_G Q)(N_R - Z_G Q)^{-1}$  die Strecke, sofern der Parameter  $Q$  stabil gewählt ist.

Damit sind Regler und Strecke in der verlangten Form für die Optimierung bereitgestellt.

Bis jetzt liegt der Reglerentwurf noch als infinites und beschränktes Optimierungsproblem vor. Wie im 5. Kapitel beschrieben, kann man dieses Optimierungsproblem noch in ein finites und unbeschränktes Optimierungsproblem umschreiben.

Um das infinite in ein **finites Optimierungsproblem** umzuwandeln, setzt man für den Parameter  $Q(s)$  eine Reihe in der Form

$$Q(s) \approx \sum_{\nu=1}^N X_\nu \left( \frac{s-p}{s+p} \right)^{\nu-1} := Q_N(s)$$

an. Der Parameter  $Q(s)$  bestimmt sich also aus den beiden vorzugebenden Parametern  $p$  und  $N$  mit den zu berechnenden Parametern  $X_\nu$ .

Der Parameter  $p$ , der Entwicklungspunkt der Reihe, ist für Konvergenzgeschwindigkeit und Güte der Optimierungsprozedur eher von untergeordneter Rolle. Er kann innerhalb gewisser Grenzen frei gewählt werden und wurde hier als  $p = 1.5$  gesetzt<sup>1</sup>. Der Parameter  $N$ , die "Länge" der Reihe, bestimmt die Ordnung des Parameters  $Q(s)$ . Da die Ordnung des Reglers größer oder gleich der Summe der Ordnungen von Strecke  $G(s)$  und Parameter  $Q(s)$  ist, bestimmt der Parameter  $N$  auch die Ordnung des resultierenden Reglers – und zwar als untere Schranke. Wählt man den Parameter  $N$  also groß, so resultiert daraus ein möglicherweise besserer Regler als bei einem kleinerem Wert für  $N$ . Der Preis dafür ist eine höhere Reglerordnung und eine längere Rechenzeit während des Entwurfes.

Da es in diesem Beispiel eher darum geht, das gesamte Entwurfsverfahren zu testen, als einen Regler von niedriger Ordnung zu entwerfen, wurde der Parameter  $N = 6$  gewählt.

Um sich von der **Nebenbedingung**  $|u(t)| \leq U_{max}$  für  $t \geq 0$  zu lösen ersetzt man nun, wie im 5. Kapitel vorgeschlagen, das Optimierungsproblem durch eine Familie von Optimierungsproblemen. Man setzt die Zielfunktion als konvexe Linearkombination der beiden maximalen Amplituden

$$J_\alpha(Q_N) = \alpha \max J_E(Q_N) + (1 - \alpha) \max J_U(Q_N) \quad \text{für} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

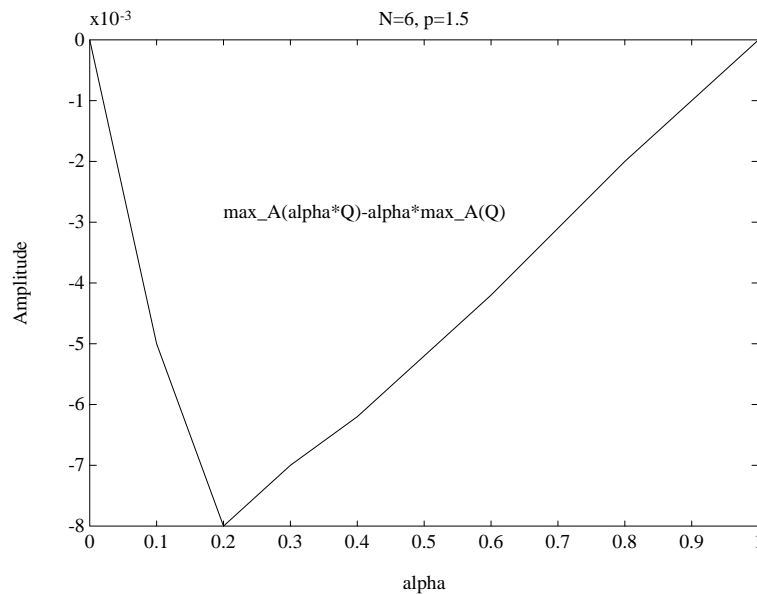
und minimiert diese für alle  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Anhand dieses Beispiels sei die **Konvexität des Optimierungsproblems** noch einmal erläutert: Um diese Konvexität nachzuprüfen, werden zwei durch die Optimierung gewonnene Reglerparameter  $Q_1$  und  $Q_2$  ausgewählt und die maximale Amplitude der konvexen Kombination der beiden Parameter  $\max J_A(\alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2)$  gegen  $\alpha$  aufgetragen. Die so gewonnene Kurve muß konvex sein. Um diesen Sachverhalt optisch besser darzustellen, kann man noch die Gerade von dieser Kurve subtrahieren  $\max J_A(\alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2) - (\alpha \max J_A(Q_1) + (1 - \alpha) \max J_A(Q_2))$ , und dann gegen  $\alpha$  auftragen. Der Einfachheit halber sei hier  $Q_2 = 0$  gewählt.

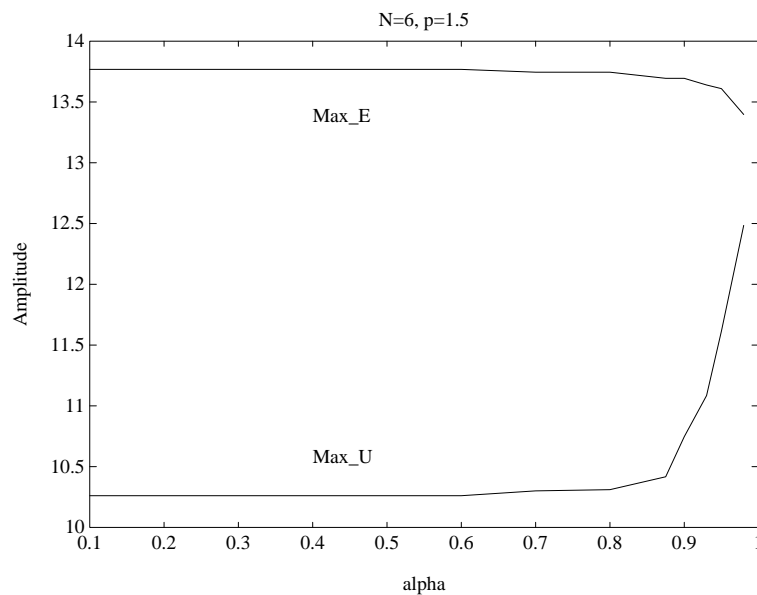
---

<sup>1</sup>Um die Wahl des Parameters  $p$  nachzuvollziehen, vergleiche auch [13].

Es ergibt sich dann die folgende Kurve, die offensichtlich konvex ist<sup>2</sup>:



Als weiteren Schritt in der Überprüfung des Optimierungsproblems kann man den Verlauf der maximalen Amplituden von Regeldifferenz und Stellgröße heranziehen. In Kapitel 5 wurden fünf Eigenschaften des optimalen Parameters  $Q$  festgehalten. Eine davon war die Monotonie von  $\max\_E$  und  $\max\_U$ :  $\max\_E$  ist monoton fallend und  $\max\_U$  ist monoton steigend. In diesem Beispiel ergeben sich die folgenden Kurven, die offensichtlich die geforderten Eigenschaften haben:



Desweiteren wurde im 5. Kapitel definiert, wann eine Reglersynthese lösbar heißt. Gemäß dieser Definition ist die Aufgabe lösbar, falls  $U_{\max} \geq 10.25$  ist, und nicht lösbar, falls  $U_{\max} < 10.25$  ist.

<sup>2</sup>Geringe Abweichungen von der Konvexität ergeben sich durch numerische Ungenauigkeiten und die starke "Verzerrung" der Grafik.

Greift man exemplarisch den Reglerparameter  $Q(s)$  für  $\alpha = 0.7$  aus der obigen Kurve heraus, so ergibt dieser einen Regler  $R_{opt}$  siebter Ordnung, mit

$$R_{opt} = \frac{3 \cdot 10^{-8}s^7 + 412.12s^6 + 3088.64s^5 + 9255.85s^4 + 13858.62s^3 + 10356.23s^2 + 3072.91s - 16.98}{s^7 + 44.20s^6 + 57.27s^5 - 944.27s^4 - 4147.53s^3 - 7186.74s^2 - 5809.34s - 1826.42}$$

Betrachtet man das Zählerpolynom genauer, so fällt auf, daß der Koeffizient der siebten Potenz verschwindend gering ist gegenüber den Koeffizienten der übrigen Potenzen. Umgekehrt produziert dieser Koeffizient eine Nullstelle des Zählers bei  $-1.373 \cdot 10^{10}$ . Der Anteil dieses Koeffizienten ist also so gering, daß man ihn gleich vernachlässigen kann und mit einem Zählerpolynom sechsten Grades weiterrechnen kann. Der Regler aus dem Entwurfsverfahren wird also wie folgt modifiziert:

$$\tilde{R}_{opt} = \frac{412.12s^6 + 3088.64s^5 + 9255.85s^4 + 13858.62s^3 + 10356.23s^2 + 3072.91s - 16.98}{s^7 + 44.20s^6 + 57.27s^5 - 944.27s^4 - 4147.53s^3 - 7186.74s^2 - 5809.34s - 1826.42}$$

Das Entwurfsverfahren produziert also einen Regler, der einen Zählergrad hat, der echt kleiner ist als der Nennergrad.

Die Nullstellen und Pole liegen dabei wie folgt verteilt:

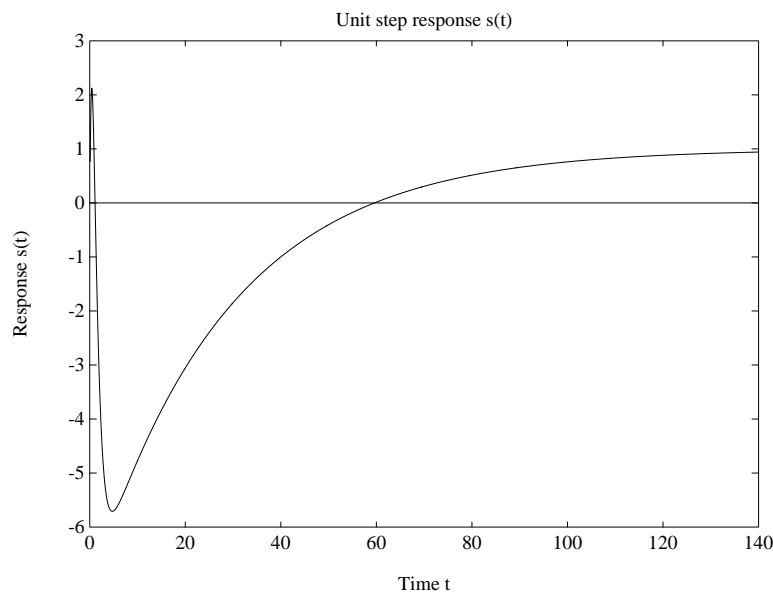
Nullstellen bei 0.005, -1.485,  $-1.512 \pm 0.0090i$ ,  $-1.495 \pm 0.014i$ ,

Pole bei -42.379, 5.675, -1.499,  $-1.501 \pm 0.0004i$ ,  $1.499 \pm 0.001i$ .

Bemerkenswert dabei sind die letzten fünf Pol-Nullstellen-Paare, die numerisch gleich sind.

Der so erhaltene Regler hat also nur eine "echte" Nullstelle bei 0.005 und zwei "echte" Pole bei -42.379 und 5.675.

Die Sprungantwort des mit dem optimalen Regler  $\tilde{R}_{opt}$  geschlossenen Kreises sieht wie folgt aus:



Als maximale Amplituden ergeben sich bei der Regeldifferenz  $e(t)$   $\max \underline{E} = 13.7877$  und bei dem Streckeneingang  $u(t)$   $\max \underline{U} = 10.4349$ .

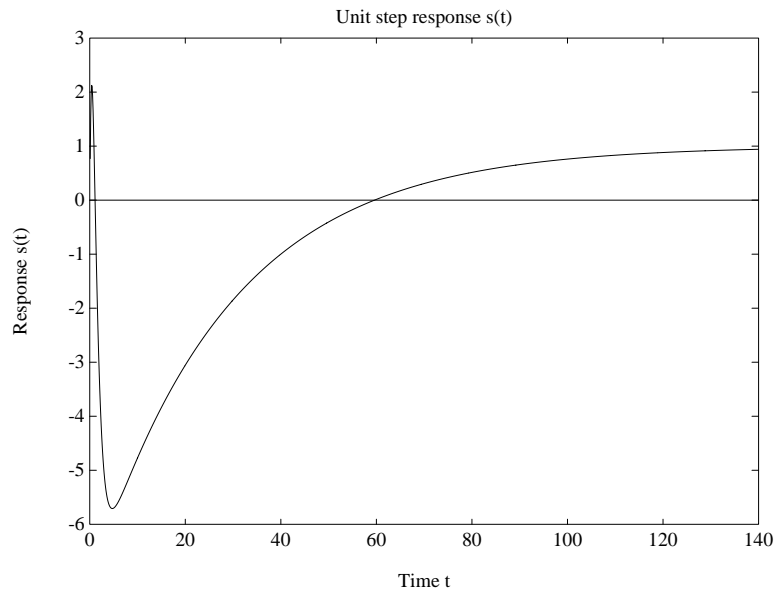
Reduziert man nun den Regler  $\tilde{R}_{opt}$  mittels optimaler Hankelapproximation auf einen Regler zweiter Ordnung, so ergibt sich für diesen:

$$R_2(s) = 412.12 \frac{s - 0.005}{(s + 42.379)(s - 5.675)}$$

d.h. diejenigen Pole und Nullstellen, die (numerisch) gleich sind, werden aus der Übertragungsfunktion "gekürzt". Erwartungsgemäß bleibt der instabile Pol bei 5.675 bestehen, ebenso wie der Vorfaktor, der auch gleich bleibt.

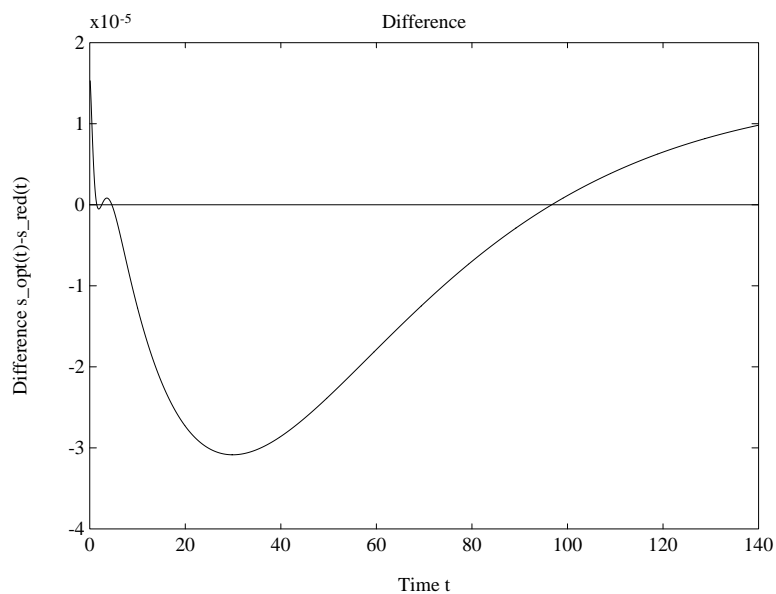
Der reduzierte Regler hat nur eine Nullstelle bei 0.005, die auf ein eventuelles nicht-robustes Verhalten hinweist.

Erwartungsgemäß zeigt deshalb auch der geschlossene Regelkreis dasselbe Sprungantwortverhalten:



Als maximale Amplituden ergeben sich bei der Regeldifferenz  $e(t)$   $\max \underline{E} = 13.6293$  und bei dem Streckeneingang  $u(t)$   $\max \underline{U} = 11.4856$ .

Interessanter ist die Differenz der Sprungantworten des mit optimalem Regler beziehungsweise reduziertem Regler geschlossenen Kreises:

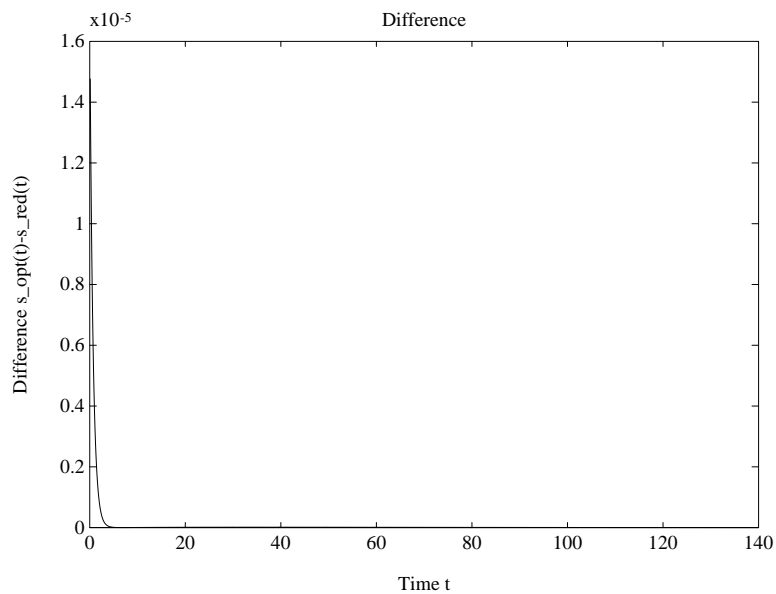


Der Fehler bewegt sich insgesamt immer in einer Größenordnung von  $10^{-5}$ , was absolut und relativ gesehen ein gutes Ergebnis ist. Interessant ist der Sprung des Fehlers gleich bei  $t = 0$ , der dann bei  $t = 30$  sein betragsmäßiges Maximum erreicht und sich dann asymptotisch bei  $+10^{-5}$  einpendelt. Die Reduktion des optimalen Reglers auf einen Regler dritter Ordnung mittels optimaler Hankelapproximation ergibt

$$R_3(s) = 412.12 \frac{(s - 0.005)(s + 4.206)}{(s + 42.379)(s - 5.675)(s + 4.206)}$$

d.h. diese Übertragungsfunktion enthält noch ein (numerisch) gleiches Pol-Nullstellen-Paar, das noch nicht gekürzt ist.

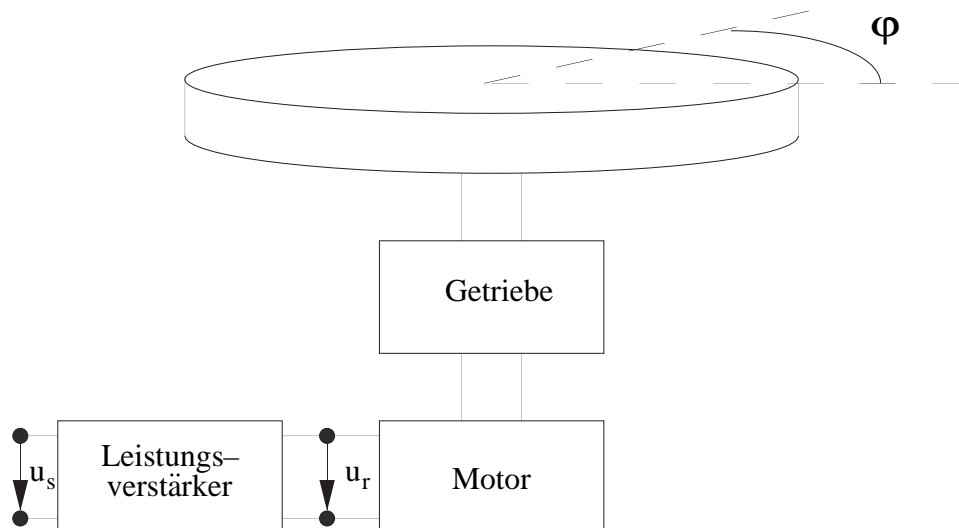
Im Gegensatz zum Regler zweiter Ordnung ist die Differenz zur Sprungantwort des optimalen Reglers geringer und oszilliert auch nicht:



Als maximale Amplituden ergeben sich bei der Regeldifferenz  $e(t)$   $\max \underline{E} = 13.6293$  und bei dem Streckeneingang  $u(t)$   $\max \underline{U} = 11.4856$ .

## 2. Beispiel: Positionsregelung einer Plattform

In diesem Beispiel soll eine Folgeregelung für die Winkelposition einer drehbaren Plattform aufgebaut werden [21]. Die drehbare Plattform besteht aus einem Gleichstrommotor, der die eigentliche Plattform über ein Getriebe antreibt, und einem Leistungsverstärker, der den Motor ansteuert.



Die genaue Untersuchung des Streckenverhaltens [21] ergibt für den Motor ein erhöhtes Ansteigen des Ankerstroms ab einem bestimmten Ankerspannungsgrenzwert. Da dieser erhöhte Strombedarf vom Leistungsverstärker nicht erbracht werden kann, resultiert daraus für die Leistungsverstärker-Motor-Einheit eine Begrenzung in der Versorgungsspannung von 6.6 Volt. Innerhalb der Begrenzung von -6.6 Volt bis +6.6 Volt kann das System in erster Näherung durch das lineare mathematische Modell mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{0.17}{s \left(1 + \frac{s}{6.6}\right)}$$

beschrieben werden<sup>3</sup>.

Für die Regelung zugrundegelegt wird ein einschleifiger Standardregelkreis mit der Regelstrecke  $G(s)$  wie oben angegeben und dem gesuchten Regler  $R(s)$ .

Die Störgröße  $v(t)$  soll den Wert Null haben und die Führungsgröße  $w(t)$  soll den folgenden Beschränkungen unterliegen:

$$|w(t)| \leq 5 \quad \text{für} \quad |\dot{w}(t)| \leq 0.6$$

Anders als im ersten Beispiel liegt hier ein konkretes regelungstechnisches Problem vor, denn aus der obigen Aufgabenbeschreibung geht eine **Stellgrößenbeschränkung** von  $|u(t)| \leq 6.6$  hervor, die berücksichtigt werden muß.

Wie beim ersten Beispiel muß vor der eigentlichen Optimierung die **Faktorisierung** von Regler und Strecke berechnet werden. Hier gehen wieder der Zustandsregler und der Beobachter ein, deren Entwurf man über die Wahl der Gewichtungsmatrizen im Gütekriterium

$$J = \frac{1}{2} \int (x^T \quad u^T) \begin{pmatrix} S & N \\ N^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} dt$$

<sup>3</sup>Weitere Ausführungen dazu in [21].

beeinflussen kann.

Im Gegensatz zum ersten Beispiel ist die Wahl der Gewichte hier nicht unproblematisch. Wählt man die Gewichte zum Beispiel wie im obigen Beispiel, so verändert sich der Verlauf der maximalen Amplituden wie folgt:

Da eine konkrete Stellgrößenbeschränkung von  $U_{\max} = 6.6$  vorliegt, ist in diesem Diagramm der Schnittpunkt der Kurve für  $\max \underline{U}$  mit dem Wert 6.6 gesucht, d.h. gesucht ist der Wert für  $\alpha$ , an dem  $\max \underline{U}(Q) = 6.6$  gilt. Der Kurvenverlauf von  $\max \underline{U}$  wächst aber im Intervall  $0.9999 \leq \alpha \leq 1.0$  von  $\max \underline{U} = 3.7$  auf  $\max \underline{U} = 8.8$ , so daß der gesuchte Wert für  $\alpha$  nicht ermittelt werden kann. In dieser Situation müssen die Gewichtungsmatrizen für den Zustandsregler- und Beobachterentwurf dahingehend variiert werden, daß der gesuchte Wert für  $\alpha$  genauer ermittelt werden kann, d.h. die Kurven "auseinandergezogen" werden.

In diesem Beispiel wurden also die Gewichtungsmatrizen wie folgt gewählt : Für den **Zustandsreglerentwurf**:

$$\begin{aligned} S &= C^T C \\ N &= (0 \quad 0) \\ R &= 0.0001 \cdot I_1 \end{aligned}$$

Für den **Beobachterentwurf**:

$$\begin{aligned} S &= 0.01 \cdot I_1 \\ N &= (0 \quad 0) \\ R &= I_1 \end{aligned}$$

Als nächstes müssen die Parameter in der **Parametrisierung für  $Q(s)$**

$$Q(s) \approx \sum_{\nu=1}^N X_{\nu} \left( \frac{s-p}{s+p} \right)^{\nu-1} := Q_N(s)$$

gewählt werden.

In diesem Beispiel liegt jetzt die Motivation derart, daß das Ergebnis mit einem vorhandenen Regler erster Ordnung verglichen werden soll. Deshalb sollte schon von vorneherein die Reglerordnung niedrig gewählt werden. Es wurde deshalb  $N = 2$  gewählt und, wie im ersten Beispiel,  $p = 1.5$ , wobei die Wahl des Entwicklungspunktes von geringerer Bedeutung ist.

Um den optimalen Regler zu ermitteln, bildet man wie oben die Zielfunktion als konvexe Linearkombination der beiden maximalen Amplituden:

$$J_{\alpha}(Q_N) = \alpha \max \underline{E}(Q_N) + (1 - \alpha) \max \underline{U}(Q_N) \quad \text{für} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Betrachtet man die Größenordnungen, in denen sich die Werte  $\max \underline{E}$  und  $\max \underline{U}$  bewegen, so stellt man folgendes fest :  $\max \underline{E}$  bewegt sich in der Größenordnung von 0.07,  $\max \underline{U}$  dagegen in der Größenordnung von 6.6. Dieses Verhältnis der Größenordnungen von etwa 100 (Im Gegensatz zum ersten Beispiel. Dort waren die Größenordnungen ungefähr gleich) wirkt sich entscheidend auf die Konvergenzgeschwindigkeit der Optimierung aus. Wird während der Optimierung der Wert der Zielfunktion als zu groß erkannt und soll verkleinert werden, so hat wegen des Unterschiedes in der Größenordnung die Variation von  $\max \underline{E}$  nahezu keinen Einfluß auf den Wert der Zielfunktion, die Optimierung an sich konvergiert also nur sehr langsam. Abhilfe schafft die folgende Vorgehensweise:



Skaliere den kleineren der beiden Werte – in diesem Fall  $\max \_E$  – derart, daß die beiden Werte ungefähr die gleiche Größenordnung haben.

Hier wurde die Zielfunktion wie folgt modifiziert:

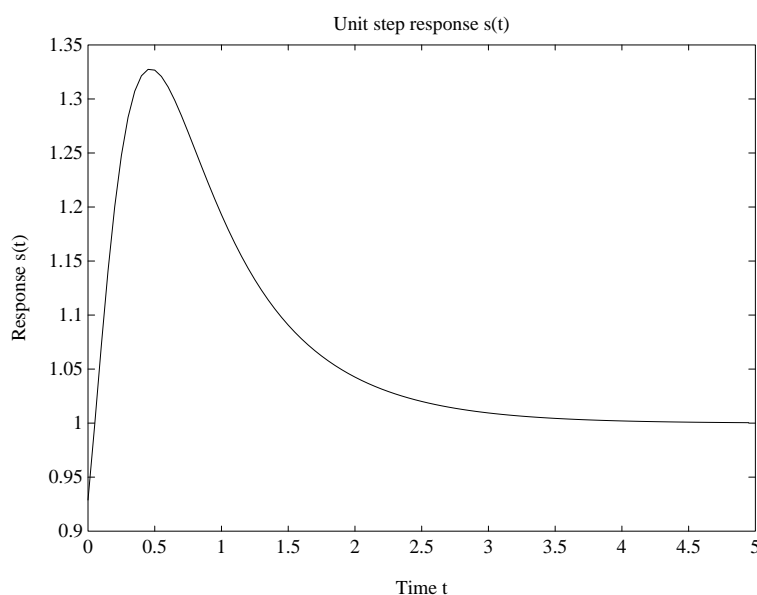
$$\tilde{\alpha}(Q_N) = 100\alpha \max \_E(Q_N) + (1 - \alpha) \max \_U(Q_N)$$

Mit den genannten Parametern ermittelt man den optimalen Regler aus dem Diagramm der maximalen Amplituden für  $\alpha = 0.953$ .

Als optimalen Regler (dritter Ordnung) erhält man dann:

$$R(s) = 1.55 \frac{(s + 104.08)(s + 6.60)(s + 0.11)}{(s + 0.02)(s + 8.98 + 7.48i)(s + 8.98 - 7.48i)}$$

Als Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises erhält man:



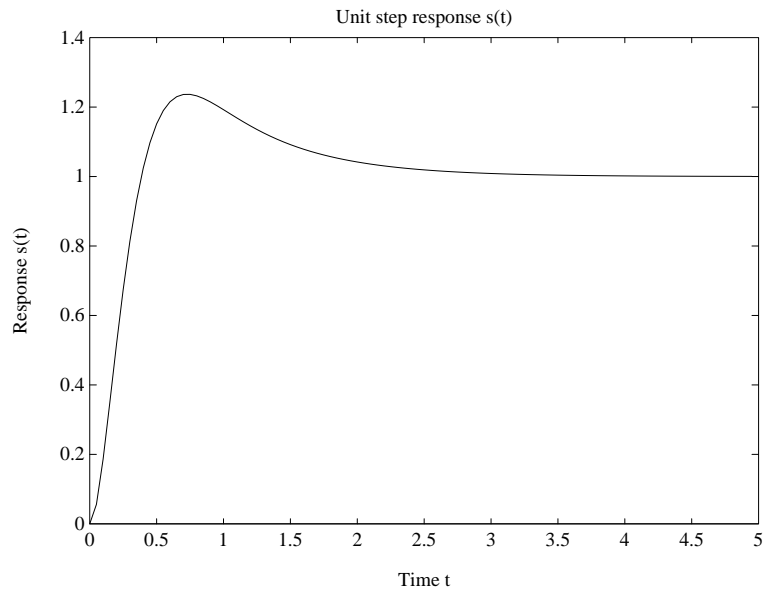
Als maximale Amplitude für die Regeldifferenz erhält man 0.07043 und für den Streckeneingang 5.5631.

Reduziert man nun den Regler mittels optimaler Hankelapproximation auf die Ordnung zwei, so erhält man:

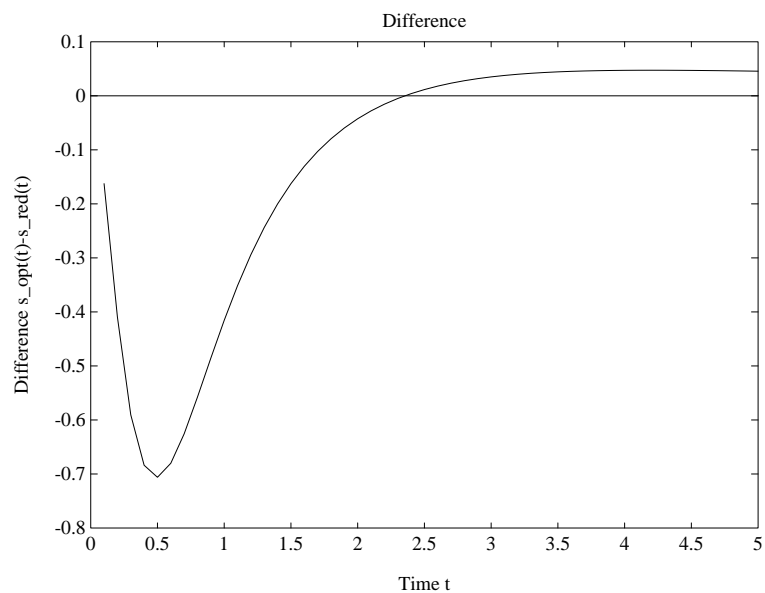
$$R_2(s) = 1.55 \frac{(s + 122.97)(s + 0.05)}{(s + 15.83)(s + 0.01)}$$

Der reduzierte Regler bleibt erwartungsgemäß stabil. Die Verstärkung bleibt mit 1.55 die gleiche. Als maximale Amplituden erhält man für die Regeldifferenz 0.07358 und für den Streckeneingang 6.5893.

Als Sprungantwort des mit dem reduzierten Regler geschlossenen Kreises ergibt sich dann:



Im Vergleich zur Sprungantwort des optimalen Regelkreises ergibt sich:



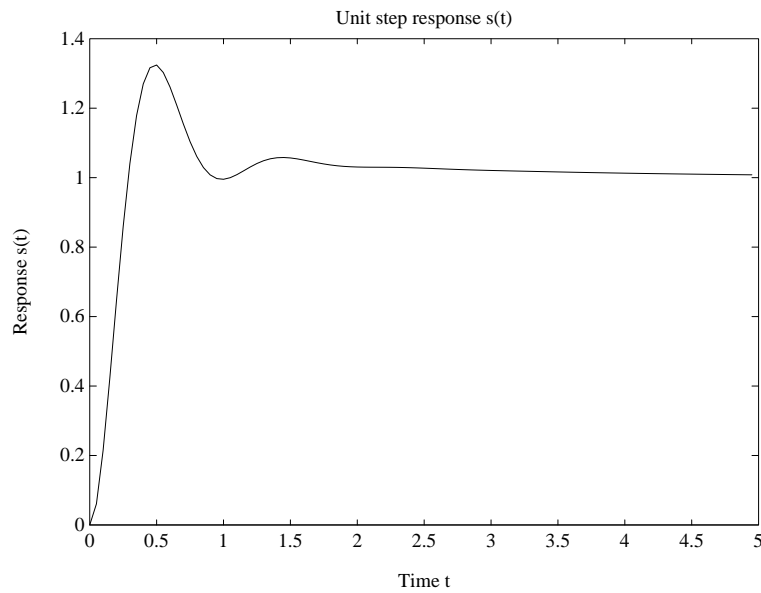
Da die Ordnungsreduktion sich hier – im Gegensatz zum ersten Beispiel – nicht nur auf eine Kürzung von numerisch gleichen Pol- und Nullstellen beschränkt, unterscheiden sich die Sprungantworten von optimalem und reduziertem Regler entsprechend.

Eine weitere Reduktion des optimalen Reglers auf einen Regler erster Ordnung ergibt

$$R_1(s) = 1.55 \frac{s + 0.98}{s + 0.04}.$$

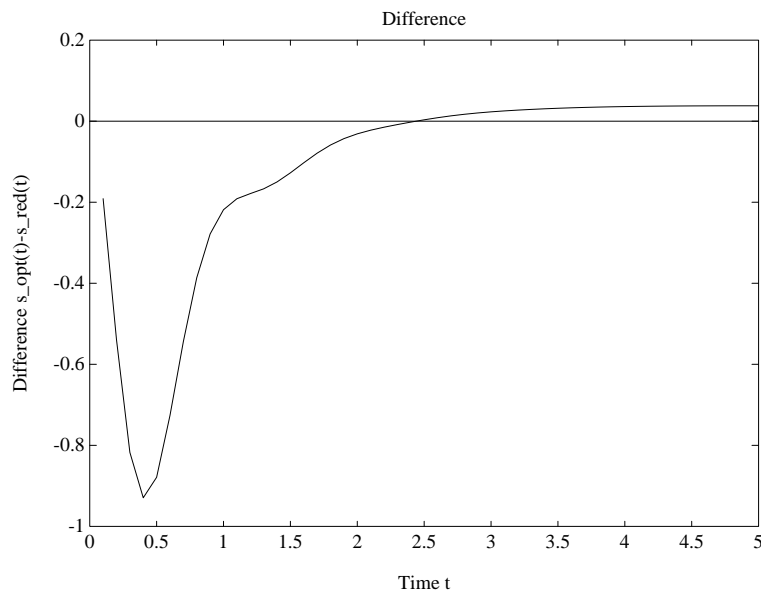
Erhalten bleiben also nur die Verstärkung von 1.55 und der Pol in der Nähe von Null.

Als Sprungantwort des geschlossenen Kreises ergibt sich:



Für die maximale Amplitude der Regeldifferenz ergibt sich ein Wert von 0.1310 und für die Stellgröße ein Wert von 7.5033.

Als Differenz der Sprungantworten des geschlossenen Kreises ergibt sich:



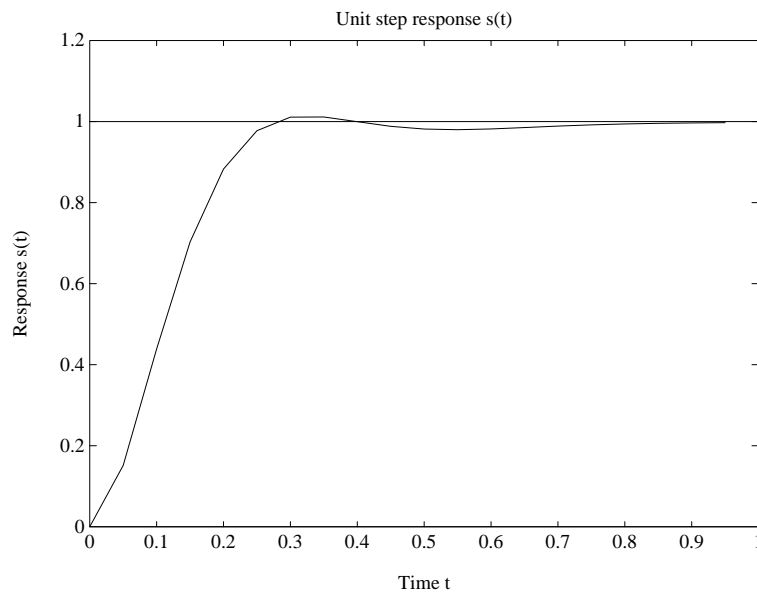
Aus demselben Grund wie bei der Reduktion auf die Ordnung zwei unterscheiden sich auch hier die Sprungantworten wesentlich.

Es lag bisher das folgende Ergebnis vor:

$$R_B(s) = \frac{145s + 726}{s + 15.15} = 145 \frac{s + 5.001}{s + 15.15}$$

(vergleiche dazu auch [3]) mit der maximalen Amplitude von 0.07457 für die Regeldifferenz und einer Stellgrößenauslastung von 99.99%.

Die Sprungantwort stellt sich wie folgt dar:



Zusammengefaßt ergibt sich folgende Situation:

REGLER	optimaler Regler	Reduktion 2	Reduktion 1	Büse
Ordnung	3	2	1	1
max $E$	0.07043	0.07358	0.1310	0.07457
max $J$	5.5631	6.5893	7.5033	6.5995
einsetzbar ?	ja	ja	nein	ja

Da sich bei der Ermittlung des optimalen Reglers die Ordnung des Reglers aus der Ordnung der Strecke und der Ordnung des Optimierungsparameters  $Q(s)$  zusammensetzt, kann man nicht direkt einen Regler der Ordnung eins ermitteln.

Der optimale Regler der Ordnung drei unterschreitet die maximale Amplitude der Regelabweichung, wobei er die Stellgrößenbeschränkung nicht voll ausnutzt. Für einen größeren Wert des Optimierungsparameters  $\alpha$  wäre eine geringere Regeldifferenz bei "optimaler" Auslastung der Stellgröße (im worst case) möglich gewesen. Es war jedoch von vorne herein das Ziel, den gefundenen Regler in der Ordnung soweit wie möglich zu reduzieren. Hierzu standen jedoch nur MATLAB-Routinen zur Ordnungsreduktion des Reglers – ohne Berücksichtigung der Strecke – zur Verfügung. Da sich bei einer alleinigen Reduktion des Reglers die Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises drastisch verändern können<sup>4</sup>, kann man nicht voraussetzen, daß die maximalen Amplituden für Stellgröße und Regelabweichung erhalten bleiben. Daher müssen diese beiden Größen nach jeder Reduktion neu ermittelt werden. Der optimale Regler dritter Ordnung wurde also so entworfen, daß zumindest die Reduktion auf die Ordnung zwei den Anforderungen genügt. Die Stellgrößenauslastung ist beim Regler zweiter Ordnung besser, jedoch wird auch die maximale Amplitude der Regelabweichung größer. Eine Reduktion des Reglers auf die Ordnung eins ist – zumindest ohne Berücksichtigung der Regelstrecke – nicht sinnvoll, da die maximale Amplitude der Stellgröße weit überschritten wird.

<sup>4</sup>Siehe dazu auch [1].

## Diskussion der numerischen Schwierigkeiten

Als Optimierungsroutine, d.h. zum Minimieren der konvexen Zielfunktion wurde die MATLAB-Routine `fminu()` benutzt. Sie basiert auf einem BFGS-Quasi-Newton Verfahren.

Als Schwierigkeiten traten im wesentlichen folgende Sachverhalte auf:

Bei der Aufdatierung der Hesseschen Matrix nach der BFGS Methode kann man optional zwischen Inversion der Matrix und Auflösen des Gleichungssystems wählen. Gerade gegen Ende der Optimierung wird die Matrixinversion kritisch. Da generell jedoch die Lösung des Gleichungssystems numerisch günstiger ist als die Inversion der Matrix, ist von vorneherein die Lösung des jeweiligen Gleichungssystems vorzuziehen (Setze dazu den Parameter `foptions(6) = 1`).

In der Optimierungsroutine selbst und bei dem Liniensuchalgorithmus treten Probleme bei der Schrittweite auf, da die Schrittweitensteuerung teilweise nicht eindeutig gegen die Maschinengenauigkeit abgesichert ist, bzw. in bestimmten Fällen die Schrittweitenkorrektur mittels Zufallsgenerator geschieht. Hier kann man bei Auftreten des Problems versuchen, innerhalb des Programms alle numerischen Parameter, die mit der Schrittweitensteuerung in Verbindung stehen, geeignet zu vergrößern. Da der generelle Fehler hierfür allerdings in der Programmstruktur liegt, kann der Fehler nicht unbedingt auf diese Weise beseitigt werden.

Als Parameter für den Reglerentwurf stehen neben der 'Länge' der Reihe für  $Q - N$  - und dem Entwicklungspunkt  $p$  noch der Zustandsregler und der Beobachter zur Verfügung.

Der Parameter  $p$  hat am wenigsten Einfluß auf Schnelligkeit und Güte der Konvergenz, wenn man ihn innerhalb eines 'vernünftigen' Intervalls wählt (siehe dazu [13]).

Mit dem Parameter  $N$  bestimmt man im wesentlichen die Ordnung des Reglers. Wesentlichen Einfluß auf die Optimierung haben der Zustandsregler und der Beobachter. Für deren Konstruktion steht die MATLAB-Routine `lqrc()` zur Verfügung, die jeweils einen Gewichtungsfaktor pro Konstruktion benötigt (zur Wahl der Gewichtungsfaktoren vergleiche auch Beispiel zwei).

Ein weiterer Grund für die Geschwindigkeit der Konvergenz ist der möglicherweise zu große Unterschied in der Größenordnung zwischen den beiden maximalen Amplituden. Diesen Unterschied in der Größenordnung sollte man in einer Vorlaufrechnung feststellen und dann in die Wertung der Zielfunktion aufnehmen, so daß beide Amplituden die gleiche Größenordnung haben (siehe Beispiel zwei).

Die Rechenzeit für eine Funktionsauswertung innerhalb der Optimierung ist sehr stark von der gewünschten Ordnung des Reglers, d.h. von der Länge der Reihenentwicklung für den Parameter  $Q$  abhängig. Je größer die Ordnung ist, um so größer ist der Anteil an der Gesamtrechenzeit, der für die Berechnung der Zustandsgrößen und koprimen Faktoren nötig ist. Absolut steigt die Rechenzeit natürlich ebenfalls.

# Literaturverzeichnis

- [1] Anderson, B.D.O.: *Controller Design: Moving from Theory to Practice*. (IEEE Control Systems Vol.13, No.4, August 1993)
- [2] Brent, R.: *Algorithms for minimization without derivatives*. (Prentice Hall, 1973)
- [3] Büse, R.: *Ein rechnerunterstütztes Syntheseverfahren für Regelsysteme mit Beschränkungen*. (Diplomarbeit an der Universität Paderborn, 1985)
- [4] Dörrscheidt, F. und Latzel, W.: *Grundlagen der Regelungstechnik* (Teubner, 1989)
- [5] Dourdoumas, N.: *Entwurf eines Regelkreises; eine ingenieurwissenschaftliche Odyssee oder "ohne Mathematik geht es nicht"*. (vieweg Jahrbuch Überblicke Mathematik 1993)
- [6] Dourdoumas, N.: *Prinzipien zum Entwurf linearer Regelkreise mit Beschränkungen – eine Einführung* (at 35. Jahrgang, Heft 8/1987)
- [7] Dowell, M. und Jarrat, P.: *The Pegasus method for computing the root of an equation*. (BIT 12, 1972, p.503-508)
- [8] Fletcher, R.: *Practical Methods of Optimization Vol.1: Unconstrained Optimization* (Wiley, 1980), *Vol.2: Constrained Optimization* (Wiley, 1981)
- [9] Föllinger, O.: *Optimierung dynamischer Systeme* (Oldenbourg, 1988)
- [10] Föllinger, O.: *Regelungstechnik* (Hüthig, 1990)
- [11] Glover, K.: *Model Reduction : A Tutorial on Hankel-Norm Methods and lower Bounds on  $L^2$ -Errors*. (IFAC 10th Triennial World Congress, Munich 1987)
- [12] Guizani, R.: *Reglerreduktion bei Mehrgrößensystemen*. (Diplomarbeit an der Universität Paderborn, 1992)
- [13] Holtgrewe, D.: *Entwurf von Mehrfachsystemen mit beschränkten Systemgrößen*. (Dissertation an der Universität Paderborn, 1992)
- [14] Kwakernaak, H. und Sivan, R.: *Linear Optimal Control Systems* (Wiley, 1972)
- [15] Landgraf, Chr. und Schneider, G.: *Elemente der Regelungstechnik* (Springer, 1970)
- [16] Lee, E.B. und Markus, L.: *Foundations of Optimal Control Theory* (Wiley, 1967)
- [17] Liu, Y. Anderson, B.D.O. und Ly, U.: *Coprime Factorisation Controller Reduction with Bezout Identity Induced Frequency Weighting*. (Automatica, Vol.26 No.2, 1990)

- [18] Meise, R. und Vogt, D.: *Einführung in die Funktionalanalysis* (Vieweg, 1992)
- [19] Oppenheim, A. und Schäfer, R.: *Digital Signal Processing* (Prentice Hall, 1975)
- [20] Pottle, C.: *On the partial expansion of a Rational Function with multiple Poles by digital Computer*. (IEEE Transactions Circuit theory Vol. CT-11, 3/1964)
- [21] Reichel, R.W.: *Synthese von Regelkreisen mit Beschränkung bei stochastischen Eingangsgrößen*. (Dissertation an der Universität Paderborn)
- [22] Rudin, W.: *Functional Analysis*. (Mc Graw Hill, 1991)
- [23] Rudin, W.: *Real & Complex Analysis*. (Mc Graw Hill, 1984)
- [24] Schwarz, H.R.: *Numerische Mathematik*. (Teubner, 1988)
- [25] Stoer, J.: *Numerische Mathematik 1 und 2*. (Springer, 1989 bzw. 1990)
- [26] Vidyasagar, M.: *Control Systems Synthesis: A Factorization Approach*. (The MIT Press, 1985)
- [27] Xiheng, H.: *FF-Padé Method of Model Reducing in Frequency Domain*. (IEEE Transactions on Automatic Control AC-32, 1987)